# Квантовые амплитуды как следствие элементарной теории вероятностей*

А.Л. Круглый†

УДК 530.12 : 539.12

**Аннотация**

Предполагается, что квантовые объекты подчиняются элементарной теории вероятностей. С помощью матричного исчисления показана связь элементарной теории вероятностей и комплексных амплитуд. В качестве примера применения предлагаемого подхода рассмотрен частный случай дискретной предгеометрии.

## 1 Введение

Квантовая механика является одной из самых загадочных научных теорий. Она обладает развитым математическим аппаратом и с математической точки зрения представляет собой строгую аксиоматическую теорию. Она очень успешна и точна при исследовании явлений микромира. Таким образом, ее адекватность не вызывает сомнений. Однако физический смысл ее базовых постулатов остается неясным. Не прекращаются попытки дать интерпретацию квантовой теории. Результатом этих усилий является спектр интерпретаций (пример такой классификации можно найти в [1]). Однако не одна из этих интерпретаций так и не стала общепринятой. Загадка квантовой механики не разгадана.

Базовой величиной в квантовой теории является квантовая амплитуда. Поскольку это исходная величина, то интерпретация квантовой механики означает физическую интерпретацию квантовой амплитуды. Но

*Квантовая механика. Новые формулировки и приложения: Сборник научных трудов. Под ред. Т.Ф. Камалова, С.В. Копылова и Ю.П. Рыбакова. - М.: Изд-во МГОУ, с. 206-225, 2009. Настоящая статья является русским вариантом статьи arXiv: 0904.1862 [physics.gen-ph]

†akrugly@mail.ru

квантовая амплитуда - величина комплексная. Непосредственная физическая интерпретация комплексной величины вряд ли возможна. Непосредственный физический смысл могут иметь только действительные числа, а, в конечном итоге, только целые неотрицательные числа, такие, как число делений на шкале прибора. По-видимому, комплексные величины в квантовой механике являются эффективным вычислительным инструментом, аналогично описанию комплексными числами переменного тока в электротехнике. Базовой величиной является вероятность дискретного события. Физический смысл вероятности - число одинаковых исходов в серии экспериментов. Это неотрицательное целое число.

Квантовая механика является теорией вероятностей микромира. Но она отлична от стандартной теории вероятностей. Теория вероятностей основана на постулатах, имеющих ясных физический смысл, самоочевидных постулатах. Поэтому наличие альтернативной квантовой теории вероятностей выглядит загадочно. Квантовую механику можно сформулировать без использования комплексных амплитуд. Квантовая механика может быть сформулирована через интегралы по путям с использованием знакопеременной меры вероятности вместо комплексных амплитуд [2]. Можно пытаться сформулировать законы для неотрицательной квантовой меры без использования комплексных амплитуд (например, [3] и цитируемые в ней работы). В этом случае возникают проблемы интерпретации отрицательных вероятностей или неочевидных правил исчисления вероятностной меры. В любом случае, если имеется адекватное описание поведения микрообъектов, то оно описывает поведение вероятностей, отличное от стандартной теории вероятностей, так как экспериментально определено, что вероятности событий в микромире не подчиняются законам теории вероятностей. Это удивительный факт, требующий интерпретации, так как законы теории вероятностей выглядят самоочевидными.

Базовые законы теории вероятностей формулируются для статистически независимых событий. Если мы рассматриваем статистически зависимые события, то их вероятности могут быть взаимосвязаны весьма сложным образом. Возможно, в квантовой теории мы имеем именно эту ситуацию. Мы не умеем разделять явления микромира на статистически независимые события, а те, на которые разделяем, - статистически зависимы. Например, это отдельные пути в интеграле по путям. Естественно, что для их вероятностей не выполняются законы, справедливые для вероятностей статистически независимых событий. Может быть, явления микромира можно разделить на статистически независимые события. Для них справедлива теория вероятностей. В этом случае квантовая механика является неочевидной математической формой теории вероятностей.

Для иллюстрации предлагаемого подхода можно использовать следующую аналогию. Рассмотрим одномерную линейную систему, которая состоит из $N$ точечных масс, соединенных идеальными пружинами. Колебания каждой массы могут иметь сложную форму, так как зависят от колебаний остальных масс. Однако мы можем разложить колебания системы на $N$ ортогональных мод. Описание колебаний системы посредством описания колебаний каждой массы и посредством нормальных мод являются двумя альтернативными способами описания одного и того же процесса. Возможно, что в квантовой механике ситуация аналогична. Нам известен способ описания посредством статистически зависимых подсистем. Необходимо найти способ разложения квантового процесса на статистически независимые события.

В следующем параграфе рассматривается математическая схема, которая реализует предлагаемую гипотезу. В третьем параграфе рассматривается конкретный пример реализации этой схемы. В четвертом параграфе обсуждаются перспективы развития предлагаемого подхода.

# 2 Элементарная теория вероятностей и квантовые амплитуды

Рассмотрим некоторое неэлементарное событие $X$. Пусть наступление $X$ имеет вероятностный характер, то есть происходит с вероятностью $p(X)$. Предположим, что $p(X)$ может быть разложена в произведение двух сомножителей:

$$p(X) = (const) p_{ext}(X) p_{int}(X) \quad , \tag{1}$$

где $const$ - нормировочная постоянная, $p_{ext}$ определяется окружением, внешним по отношению к $X$, а $p_{int}(X)$ определяется внутренней структурой $X$. Далее будем интересоваться только вероятностью $p_{int}(X)$. Ее можно представить в виде:

$$p_{int}(X) = 2^{-I(X)} = \exp(-\ln(2) I(X)) \quad , \tag{2}$$

где $I(X)$ - количество информации в битах, содержащееся в структуре $X$. Предположим, что внутренняя структура $X$ определяется некоторой дискретной предгеометрией. При этом внутренняя структура $X$ обладает $n$ статистически независимыми свойствами. Каждое из этих свойств может принимать конечное число значений. Это число значений может быть различным для различных свойств. Причем другие свойства никак не влияют на величину $p_{int}(X)$. Таким образом, $p_{int}(X)$ можно представить как произведение $n$ сомножителей, где каждый из сомножителей равен вероятности одному из $n$ свойств иметь какое-то определенное значение, реализованное в событии $X$. Мы можем записать, что

$$p_{int}(X) = \exp(-\ln(2)\sum_{i=1}^{n} I(i,j)) \quad , \tag{3}$$

где $I(i,j)$ является количеством информации в битах, которым обладает свойство $i$ внутренней структуры $X$, когда принимает значение номер $j$. По предположению число элементарных событий конечно, то есть зависимость вероятности наступления события $X$ от внутренней структуры $X$ описывается элементарной теорией вероятностей.

В теории вероятностей ненормированную вероятностную меру на пространстве элементарных событий можно задавать произвольным образом. Теория вероятностей не накладывает ограничений на зависимость вероятности элементарных событий от различных физических факторов. Например, вероятность выпадения определенной стороны монеты может сложным образом зависеть от асимметрии монеты и законов аэродинамики.

Предположим, что сумма по $i$ от 1 до $n$ по $I(i,j)$ является следом некоторой квадратной матрицы $\mathbf{X}$ размера $(n,n)$, описывающей внутреннюю структуру $X$. Ниже все матрицы будут обозначаться прописными латинскими буквами жирным шрифтом. Это предположение может быть следствием некоторой матричной модели [4]. Другими словами, $I(i,j)$ равно элементу $x_{ii}$ матрицы $\mathbf{X}$. Если свойство номер $i$ принимает другое значение, а не значение номер $j$, то событие $X$ имеет другую структуру и описывается другой матрицей размера $(n,n)$.

$$I(X) = \sum_{i=1}^{n} I(i,j) = \operatorname{Tr}\mathbf{X} \tag{4}$$

$$p_{int}(X) = \exp(-\ln(2)\operatorname{Tr}\mathbf{X}) \quad . \tag{5}$$

Воспользуемся известной в теории матриц формулой

$$p_{int}(X) = \exp(-\ln(2)\operatorname{Tr}\mathbf{X}) = \det\exp(-\ln(2)\mathbf{X}) \quad , \tag{6}$$

которая справедлива, для любой квадратной матрицы $\mathbf{X}$.

Представим матрицу $\exp(-\ln(2)\mathbf{X})$ в виде

$$\exp(-\ln(2)\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} \quad , \tag{7}$$

где $\mathbf{A}$ квадратная матрица размера $(n,n)$, а $\mathbf{A}^{\dagger}$ эрмитово сопряженная ей матрица. Разложение (7) неоднозначно. Оно определено с точностью до произвольной унитарной матрицы $\mathbf{U}$ размера $(n,n)$. Если $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению (7), то $\mathbf{AU}$ также удовлетворяет уравнению (7):

$$\mathbf{A} \to \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{AU} \quad . \tag{8}$$

Пусть $\mathbf{A}$ самосопряженная матрица. Тогда

$$\mathbf{A}^2 = \exp(-\ln(2)\mathbf{X}) \tag{9}$$

$$\mathbf{A} = \exp(-2^{-1}\ln(2)\mathbf{X}) \quad . \tag{10}$$

Любая матрица $\mathbf{A}$, удовлетворяющая соотношению (7) может быть получена из самосопряженной матрицы (10) с помощью преобразования (8). Выполним преобразование подобия, которое не меняет значение определителя матрицы

$$\begin{aligned} p_{int}(X) = \det\exp(-\ln(2)\mathbf{X}) \quad &= \quad \det(\mathbf{U}^{\dagger}\exp(-\ln(2)\mathbf{X})\mathbf{U}) = \\ &= \det\exp(-\ln(2)\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{X}\mathbf{U}) \quad . \end{aligned} \tag{11}$$

Последнее равенство является свойством функций от матриц. В силу (7) и (8) имеем

$$p_{int}(X) = \det\exp(-\ln(2)\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{X}\mathbf{U}) = \det\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{U}\det\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{U} \quad . \tag{12}$$

По определению величину $\det\mathbf{A}$, определенную с точностью до преобразований (8) и унитарных преобразований (12), назовем амплитудой события $X$.

По определению функция от матрицы является суммой бесконечного матричного ряда. Из (10) получаем

$$\mathbf{A} = \exp(-2^{-1}\ln(2)\mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\ln(2)\mathbf{X})^n}{2^n n!} \quad . \tag{13}$$

Определитель матрицы $\mathbf{A}$ представляет собой сумму бесконечного числа слагаемых, которые является как положительными, так и отрицательными числами. Преобразованием (8), или унитарным преобразованием (12) можно представить амплитуду события $X$ как сумму бесконечного числа комплексных слагаемых. Если интерпретировать эти слагаемые как «альтернативы», то мы получаем суммирование комплексных амплитуд «альтернатив». Такой способ подсчета вероятностей выглядит загадочным только, если интерпретировать эти «альтернативы», как статистически независимые альтернативы в смысле теории вероятностей.

Отметим, что в предлагаемой модели микрообъект является изначально классической стохастической системой, не имеющей детерминистической эволюции. Отличный подход предложен в [5]. Квантовые законы также рассматриваются как следствие классического статистического описания матричной модели. Однако динамика системы предполагается детерминистической, а стохастическое описание является вторичным, аналогично классической статистической теории.

В заключение параграфа отметим еще одно свойство рассмотренных амплитуд. Предположим, что матрица $\mathbf{X}_{12}$ двух несвязанных явлений 1 и 2 является суммой их матриц $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$

$$\mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \quad . \tag{14}$$

Тогда

$$\operatorname{Tr}\mathbf{X}_{12} = \operatorname{Tr}\mathbf{X}_1 + \operatorname{Tr}\mathbf{X}_2 \quad , \tag{15}$$

или, используя соотношение (4), получаем

$$I(X_{12}) = I(X_1) + I(X_2) \qquad . \tag{16}$$

Сделанное предположение реализует тот факт, что количество информации, содержащееся в двух несвязанных явлениях, равно сумме количеств информации, содержащихся в каждом из этих явлений. Для амплитуд получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{12} = \exp(-2^{-1}\ln(2)\mathbf{X}_{12}) = \exp(-2^{-1}\ln(2)(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)) &= \\ = \exp(-2^{-1}\ln(2)\mathbf{X}_1)\exp(-2^{-1}\ln(2)\mathbf{X}_2) &= \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\det\mathbf{A}_{12} = \det\mathbf{A}_1 \det\mathbf{A}_2 \quad . \tag{18}$$

Амплитуда двух несвязанных явлений 1 и 2 является произведением их амплитуд, что соответствует квантовой механике.

Рассмотренная схема показывает, что алгебра квантовых амплитуд может быть математической формой элементарной теории вероятностей некоторой дискретной предгеометрии.

# 3 Модель предгеометрии

Рассмотрим пример модели дискретной предгеометрии, реализующий описанную схему. В модели структура описывается матрицами. Со следом одной из матриц можно связать вероятность реализации конкретной структуры.

Модель представляет собой конечный ориентированный ациклический граф. Граф - это множество вершин, на котором задано бинарное отношение. Обозначим вершины строчными латинскими буквами $a$, $b$, $\ldots$ Бинарное отношение $(ab)$ называется ребром. Ребро является ориентированным, то есть учитывается порядок вершин в $(ab)$. Вершина $a$ является началом ребра $(ab)$, а вершина $b$ является его концом. Маршрутом в графе называется такая последовательность вершин, что каждые две последовательные вершины связаны ребром. Циклическим называется маршрут, у которого начальная и конечная вершина совпадают. Ориентированным называется маршрут, у которого каждые две последовательные вершины являются соответственно началом и концом связывающего их ребра. Противоположно ориентированным маршрутом называется маршрут, у которого каждые две последовательные вершины являются соответственно концом и началом связывающего их ребра. Ориентированный граф является ациклическим, если в нем отсутствуют циклические ориентированные маршруты.

В этой модели вершины графа являются событиями аналогично точкам пространства-времени. Ребро $(ab)$ имеет физический смысл элементарной причинно-следственной связи между элементарным событием - причиной $a$ и элементарным событием - следствием $b$. Если две вершины связаны ориентированным маршрутом, то физически это означает наличие причинно-следственной связи между начальной вершиной маршрута, которая является причиной, и конечной вершиной маршрута, которая является следствием. Ориентированный маршрут имеет физический смысл пространственно-подобной или свето-подобной мировой линии. Соответственно, ориентированное ребро имеет физический смысл элементарного отрезка мировой линии.

Причинно-следственная связь вершин является отношением частичного упорядочения, обозначаемого $\preceq$. Множество вершин рассматриваемого графа образует частично упорядоченное, локально конечное множество, именуемое в англоязычной литературе «causal set» (причинностное множество) [6, 7, 8]. Однако в рассматриваемой модели отношение непосредственного следования [9], идентифицируемое с ориентированным ребром, является более фундаментальным, чем отношение частичного упорядочения.

Для причинностного множества вершин $C$ принята следующая терминология. Прошлым вершины $a$ называется множество $past(a) = \{b \in C | (b \preceq a)\}$. Это дискретный аналог светового конуса прошлого. Максимальной называется вершина, если не существует вершин, для которых она находится в прошлом. Аналогично будущим вершины $a$ называется множество $future(a) = \{b \in C | (a \preceq b)\}$. Это дискретный аналог светового конуса будущего. Минимальной называется вершина, если не существует вершин, для которых она находится в будущем. Полный ориентированный маршрут - это маршрут, к которому нельзя добавить ни одной вершины так, чтобы он остался ориентированным. В конечном ориентированном ациклическом графе каждый полный ориентированный маршрут начинается в минимальной вершине и заканчивается в максимальной вершине.

Любой конечный граф взаимно однозначно задается своей матрицей инцидентности или матрицей инцидентности вершин, или матрицей инцидентности ребер. Матрица инцидентности вершин также называется матрицей смежности. Это способы записи структуры графа. Осуществляя различные действия с этими матрицами, можно получить описание различных свойств графа. Таким образом, граф является естественным примером искомой предгеометрии.

Для дальнейшего рассмотрения удобно воспользоваться описанием структуры графа с помощью матрицы смежности $\mathbf{V}$. Матрица $\mathbf{V}$ задается следующим образом. Перенумеруем все вершины. Элемент $v_{ij}$ матрицы $\mathbf{V}$ равен 1, если имеется ребро $(ij)$. В противном случае $v_{ij}$ равен 0. Если допускается существование кратных ребер, то есть существование более одного ребра $(ij)$, то $v_{ij}$ равен количеству ребер $(ij)$. По построению $\mathbf{V}$ является квадратной матрицей, размер которой равен числу вершин в графе.

Пусть $n$ - число максимальных вершин, а $m$ - число минимальных вершин. Пусть $\mathbf{S}$ - матрица числа ориентированных маршрутов от минимальных до максимальных вершин. Элемент $s_{ij}$ этой матрицы по определению равен числу полных ориентированных маршрутов из минимальной вершины $i$ в максимальную вершину $j$. Размер матрицы $\mathbf{S}$ равен $(m, n)$. Матрица $\mathbf{S}$ может быть получена из матрицы $\mathbf{V}$ по следующему алгоритму. Очевидно, что элемент $v_{ij}(k)$ матрицы $\mathbf{V}^k$ равен числу ориентированных маршрутов из вершины $i$ в вершину $j$, которые состоят из $k$ ребер. Соответственно, общее число ориентированных маршрутов из вершины $i$ в вершину $j$ равно элементу $w_{ij}$ матрицы $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{V}^k \quad , \tag{19}$$

где $N$ рано числу ребер в графе. Последнее слагаемое в сумме отлично от нуля только, если граф представляет собой ориентированный маршрут. Матрица $\mathbf{S}$ получается из матрицы $\mathbf{W}$ вычеркиванием всех строк, кроме строк, соответствующих номерам минимальных вершин, и всех столбцов, кроме столбцов, соответствующих номерам максимальных вершин.

Элемент $s_{ij}^T$ транспонированной матрицы $\mathbf{S}^T$ равен числу обратно ориентированных маршрутов из максимальной вершины $i$ в минимальную вершину $j$. Элемент $s_{ij}(2)$ матрицы $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ равен числу маршрутов, состоящих из двух частей (рис. 1). Первая часть представляет собой полный обратно ориентированный маршрут из максимальной вершины $i$ в минимальную вершину $l$. Вторая часть представляет собой полный ориентированный маршрут из минимальной вершины $l$ в максимальную вершину $j$. По всем минимальным вершинам $l$ в элементе $s_{ij}(2)$ происходит суммирование. Диагональный элемент $s_{aa}(2)$ равен числу всех циклических маршрутов из максимальной вершины $a$ до каждой минимальной вершины и обратно (рис. 1). Причем часть циклического маршрута от $a$ до минимальной вершины является полным обратно ориентированным маршрутом, а часть циклического маршрута от минимальной вершины до $a$ является полным ориентированным маршрутом. Для краткости будем называть такие циклические маршруты петлями ранга 1. Размер матрицы $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ равен $(n, n)$. Ключевым предположением является, что для рассматриваемой модели матрица $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ отождествляется с матрицей $\mathbf{X}$, введенной в предыдущем параграфе.

$$p_{int}(X) = \exp(-\ln(2)\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{S}^T\mathbf{S}) \quad . \tag{20}$$

Рассмотрим физический смысл этой гипотезы. $\mathrm{Tr}\,\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ равен числу петель ранга 1 в графе. Таким образом, предполагается, что каждая однократная петля содержит один бит информации о внутренней структуре ориентированного графа. Другими словами, каждая однократная петля в графе означает реализацию одного из исходов некоторой бинарной альтернативы. Идея о бинарной альтернативе как основе динамики микромира неоднократно обсуждалась, например, в п. 44.5 книги [11], работах [12, 13, 14, 15, 16, 17]. Этот список не претендует на полноту. Идентификация петель ранга 1 с бинарными альтернативами должна быть следствием некоторого фундаментального принципа и может приводить к наложению дополнительных ограничений на допустимую структуру графа.

Рассмотрим статистический ансамбль, который представляет собой множество графов, содержащих одинаковое количество $m$ минимальных вершин, одинаковое количество $n$ максимальных вершин и одинаковое количество $M$ однократных петель. Каждый такой граф является точкой пространства элементарных событий и представляет собой одновременную реализацию $M$ бинарных альтернатив. Его вероятность пропорциональна $2^{-M}$. Суммирование по вероятностям структур, составляющих статистический ансамбль графов, определяет нормировочный множитель в уравнении (1). Могут рассматриваться и другие статистиче-

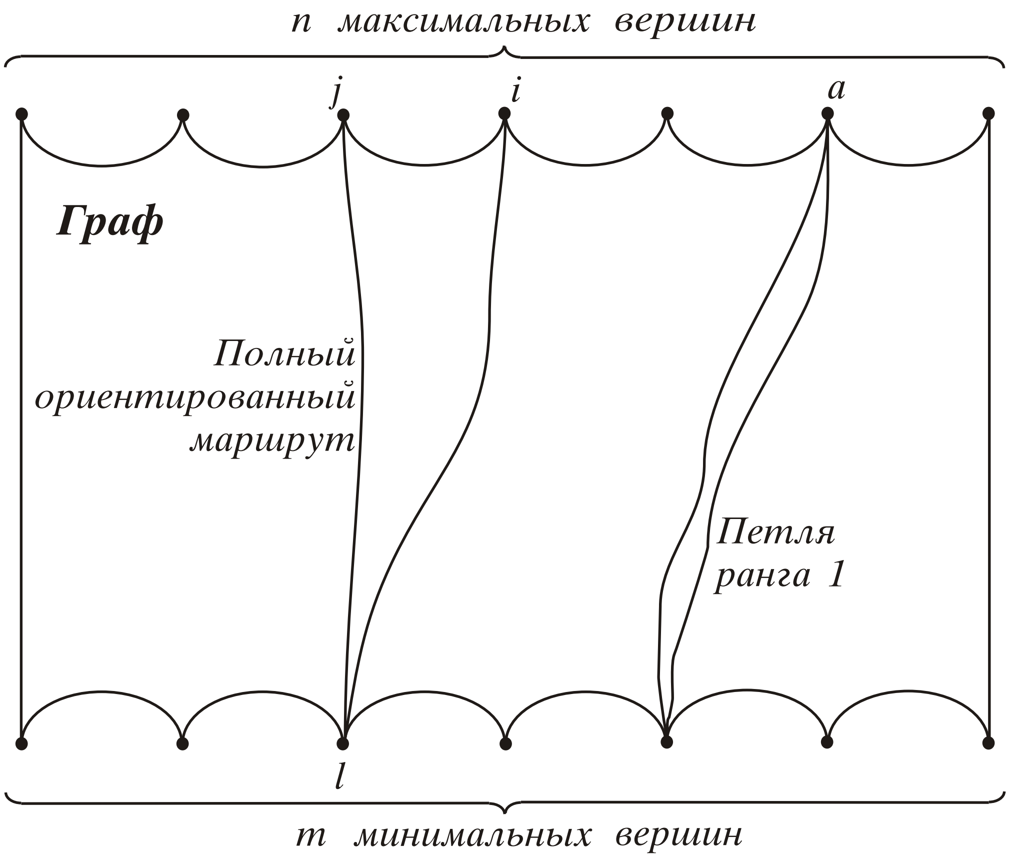


Рис. 1: Маршруты, соответствующие элементам матрицы $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$.

ские ансамбли. Выбор статистического ансамбля определяется характером рассматриваемой задачи, начальными и конечными условиями. Этот выбор является существенной частью проблемы идентификации модели предгеометрии с наблюдаемыми явлениями.

В формуле (20) $M$ сомножителей $2^{-1}$ сгруппированы в $n$ групп по числу максимальных элементов. Число сомножителей в каждой группе равно числу однократных петель в световом конусе прошлого соответствующего максимального элемента. Другими словами элемент $s_{aa}(2)$ равен числу бит информации, содержащейся в световом конусе прошлого максимальной вершины $a$. Величина элемента $s_{aa}(2)$ определяется только структурой светового конуса прошлого $past(a) = \{b \in C|(b \preceq a)\}$ максимальной вершины $a$. Динамика системы определяется структурой световых конусов прошлого максимальных элементов, что отражает принцип причинности.

Рассматриваемая модель допускает обращение направления времени. Это означает замену ориентации всех ребер графа. В формуле (20) мы можем переставить матрицы $\mathbf{S}^T$ и $\mathbf{S}$ согласно свойству инвариантности следа матрицы относительно такой перестановки. Квадратная матрица $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ имеет размер $(m, m)$. При такой перестановке $M$ сомножителей $2^{-1}$ сгруппированы в $m$ групп по числу минимальных элементов. В этой формулировке динамика системы определяется структурой световых конусов будущего минимальных элементов.

Квантовая амплитуда графа по предположению равна определителю матрицы амплитуд $\mathbf{A}$. С учетом равенств (10) и (20) получаем

$$\det \mathbf{A} = \det \exp(-2^{-1} \ln(2)\mathbf{S}^T\mathbf{S}) \quad . \tag{21}$$

Рассмотрим физический смысл отдельных слагаемых в выражении для амплитуды (21). Разложение (13) экспоненты матрицы $-2^{-1}ln(2)\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ в ряд записывается в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\ln(2)\mathbf{S}^T\mathbf{S})^k}{2^k k!} \quad . \tag{22}$$

Элемент $s_{ij}(2, k)$ матрицы $(\mathbf{S}^T\mathbf{S})^k$ представляет собой число маршрутов следующего вида (рис. 2). Каждый такой маршрут состоит из последовательности $k$ полных обратно ориентированных маршрутов и $k$ полных ориентированных маршрутов. Он начинается в максимальной вершине $i$, состоит из полного обратно ориентированного маршрута из $i$ в некоторую минимальную вершину $a$, затем из полного ориентированного маршрута из $a$ в некоторую максимальную вершину $b$, затем из полного обратно ориентированного маршрута из $b$ в некоторую минимальную вершину $c$ и так далее. Последний отрезок представляет собой ориентированный маршрут в максимальную вершину $j$. Назовем такой маршрут маршрутом ранга $2k$. Если вершины $i$ и $j$ совпадают, то назовем маршрут ранга $2k$ петлей ранга $k$. Элемент $a_{ij}$ матрицы $\mathbf{A}$ представляет собой сумму числа маршрутов всех четных кратностей из максимальной вершины $i$ в максимальную вершину $j$, взятых с некоторыми коэффициентами.

Размер матрицы $\mathbf{A}$ равен $(n, n)$, где $n$ - число максимальных вершин. Определитель матрицы $\mathbf{A}$ представляет собой сумму $n!$ членов. Каждый член этой суммы является произведением $n$ различных элементов $a_{ij}$, причем каждый номер строки и каждый номер столбца встречается в произведении однократно. Это произведение $n$ бесконечных сумм. Таким образом, $\det \mathbf{A}$ является бесконечной суммой. В каждом слагаемом конец одного маршрута является началом другого. Следовательно,

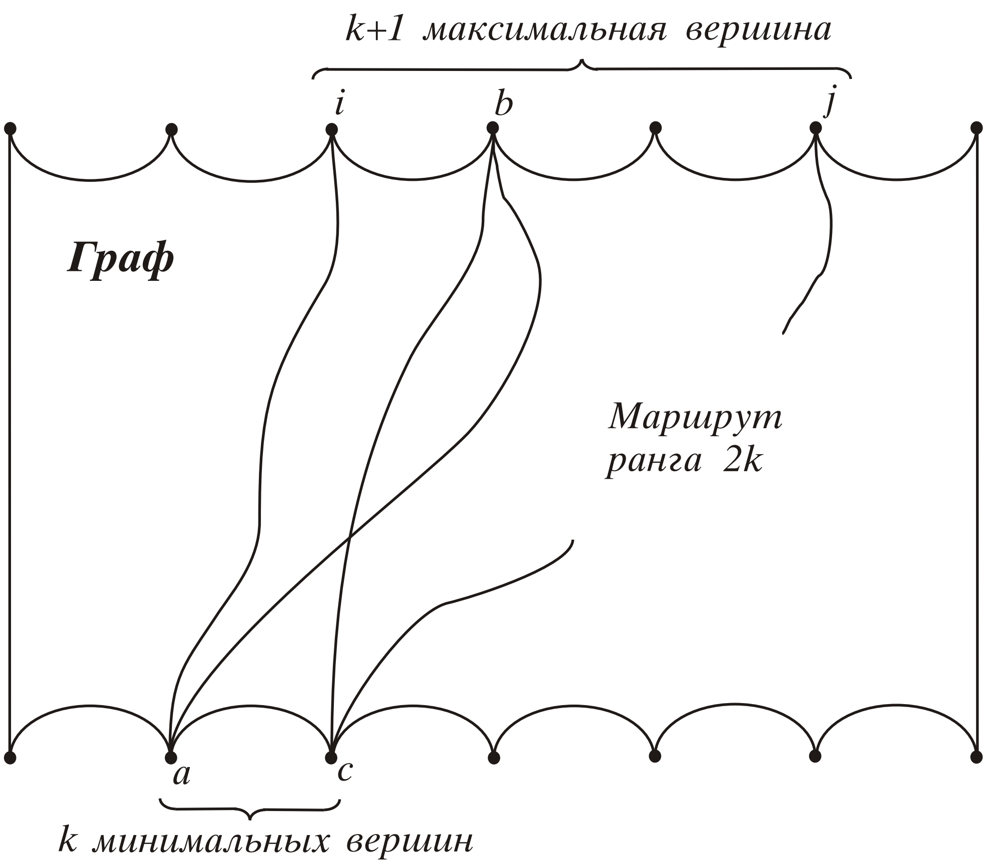


Рис. 2: Маршрут ранга $2k$.

$\det \mathbf{A}$ является суммой по петлям. Различные петли могут иметь различные коэффициенты, и различные маршруты, составляющие одну петлю, могут иметь различные коэффициенты. За счет преобразований вида (8) или (12) амплитуда может принимать комплексные значения. При этом полные ориентированные маршруты могут иметь комплексные коэффициенты.

Для большого графа вычисление $\det \mathbf{A}$ как суммы бесконечного ряда может оказаться очень сложной задачей. Однако за этим суммированием стоит простой факт, что

$$(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{A})^* = 2^{-M} \quad , \tag{23}$$

где $M$ - число бинарных альтернатив в рассматриваемом графе.

Две несвязанные системы описываются несвязным графом, состоящим из двух связных подграфов. В этом случае мы можем так выбрать нумерацию вершин, что $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ является блочно-диагональной матрицей. Блоки соответствуют подграфам. След блочно-диагональной матрицы равен сумме следов отдельных блоков, что согласуется с равенствами (14) - (18).

Два последовательных этапа эволюции системы описываются двумя подграфами $X_1$ и $X_2$. Причем максимальные вершины подграфа $X_1$ совпадают с минимальными вершинами подграфа $X_2$. Каждый полный ориентированный маршрут графа является объединением полного ориентированного маршрута подграфа $X_1$ и полного ориентированного маршрута подграфа $X_2$. Соответственно,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 \quad , \tag{24}$$

и $\mathrm{Tr}(\mathbf{S}^T\mathbf{S})$ не равно $\mathrm{Tr}(\mathbf{S}_1^T\mathbf{S}_1) + \mathrm{Tr}(\mathbf{S}_2^T\mathbf{S}_2)$. Модель правильно отражает тот факт, что последующий этап эволюции системы не является статистически независимым от предыдущего этапа.

# 4 Обсуждение

Рассмотренный пример показывает, что квантовые амплитуды могут быть математической формой элементарной теории вероятностей.

В этой модели предгеометрии эволюция системы описывается уравнением (24). Это «алгебра ориентированных маршрутов». Вероятности определяются петлями. Каждый полный ориентированный маршрут включается в петли дважды. Один раз в направлении ориентации и другой раз в противоположном направлении. Это определяет квадратичный по $\mathbf{S}$ закон для информации. Петли - это «квадраты ориентированных маршрутов». Теория вероятностей предгеометрии есть «квадрат ее динамики».

С математической точки зрения для графов с равным числом минимальных и максимальных вершин можно идентифицировать матрицу $\mathbf{X}$ с матрицей $\mathbf{S}$, так как последняя в этом случае является квадратной. Однако, это неприемлемо с физической точки зрения. След матрицы $\mathbf{S}$ равен числу ориентированных маршрутов из минимальных вершин в максимальные вершины, которые имеют те же номера. Этот след меняется при смене нумерации вершин, а физические результаты не должны зависеть от изменения нумерации вершин.

В рассмотренной схеме амплитуда явления всегда является определителем некоторой матрицы. При описании реальных квантовых процессов сумма амплитуд «альтернатив» не обязательно имеет такой вид. Во-первых, суммируется только конечное число членов, а не весь бесконечный ряд (13). Во-вторых, даже в учитываемых порядках разложения часть слагаемых может оказаться малой и не учитываться. Кроме того, некоторые группы слагаемых могут быть объединены, что отражает объединение ребер и вершин в элементарные частицы.

В рассмотренном подходе физический смысл должны иметь преобразования (8) и (12). Выделенным случаем является преобразование матрицы амплитуд к жордановой форме.

Можно рассмотреть различные обобщения модели предгеометрии. Матрица $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ учитывает вырожденные однократные петли. Эти петли состоят из одного полного ориентированного маршрута, который проходится сначала в обратном направлении, а затем в прямом. Их можно исключить, если из матрицы $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ вычесть матрицу $\mathbf{S}^T\mathbf{Z}$. $\mathbf{Z}$ является матрицей размера $(m, n)$, у которой все элементы равны 1. Можно рассматривать и другие виды петель. Например, петли, в которых не повторяются ребра или вершины. Для этого можно использовать математический аппарат, рассматриваемый в работах [18, 19, 20, 22]. Идея заключается в том, что элементам графа (ребрам или вершинам, или каким-то другим элементам графа в зависимости от постановки задачи) ставятся в соответствие образующие одномерных грассмановых алгебр. Из них строится соответствующая матрица инцидентности. В произведениях таких матриц появляются степени образующих одномерных грассмановых алгебр. Они равны нулю. Степень образующей одномерной грассмановой алгебры соответствует кратности прохождения соответствующего элемента в маршруте. Тем самым все такие маршруты исключаются. Потом производится интегрирование по образующим одномерных грассмановых алгебр. В результате получается матрица, элементы которой являются неотрицательными числами. Эти числа равны количеству маршрутов с заданными свойствами. Могут вводиться веса для ребер или вершин. Для этого элементы соответствующей матрицы инцидентности умножаются на весовые множители. Таким образом, рассматриваемая схема позволяет описывать различные варианты динамики.

В модели, адекватно описывающей реальный мир, формулы (21) и (22) должны соответствовать суммированию фейнмановских диаграмм. Рассмотренный простейший пример не удовлетворяет этому условию. Ребрам и вершинам должны соответствовать матрицы. Это может означать, что линии и вершины в фейнмановских диаграммах соответствуют не отдельным ребрам и вершинам графа, а некоторым подграфам. Тем самым имеется агрегирование вершин и ребер в мета-вершины и мета-ребра с внутренними степенями свободы. При этом мета-вершины и мета-ребра могут иметь коэффициенты в виде матриц. Другой возможностью является расширение области определения элементов матрицы $\mathbf{U}$ в преобразованиях (8) и (12). Эти элементы могут быть не числами, а матрицами.

Фейнмановские диаграммы имеют внешние линии. В графе ребро является отношением двух вершин. Внешних ребер быть не может. Однако можно рассмотреть другую математическую структуру. В качестве исходных элементов можно выбрать ребра, а вершины определить как отношение на множестве ребер [19, 20, 21, 22]. Такая структура допускает внешние ребра. На множестве ребер определяется отношение частичной упорядоченности. Минимальными и максимальными элементами являются внешние ребра. Такую структуру можно описать на языке матриц инцидентности и провести аналогичное рассмотрение.

Предгеометрия должна описывать всю совокупность пространство-время-материя. В модели причинностного множества предполагается равномерное распределение дискретных элементов в пространстве-времени [8]. Возможно, так может описываться пустое пространство-время. Но тогда поля и частицы надо добавлять ad hoc. Для естественного описания полей и частиц предгеометрия должна образовывать неравномерные иерархические структуры с симметриями. Возможно, такими структурами могут быть петли. Существование устойчивых объектов означает высокую вероятность квазипериодических структур.

На фундаментальном уровне единственные связи - это причинно-следственные связи. Любая одновременная структура представляет собой множество несвязанных точек. Точки связаны только посредством пересечения своих световых конусов прошлого. Поэтому, любая топологическая структура есть процесс. Петли являются топологическими объектами. Они не локальны относительно определения локальности для графа. В [23] топологические объекты идентифицированы с частицами. Они представляют собой два множества вершин и переплетенные связи между ними. В [24, 25] эти объекты рассматриваются как пространственноподобные. С точки зрения предлагаемого подхода, структуры должны рассматриваться как периодические процессы. Эти топологические объекты могут быть одним циклом процесса. Одно множество вершин является начальным состоянием, а другое - конечным, и переплетенные связи являются самим тактом процесса. Вершины, являющиеся конечным состоянием предыдущего цикла, являются начальным состоянием следующего цикла.

В рассмотренной модели нет понятия вероятности структуры в фиксированный момент времени. Есть понятие вероятности отрезка процесса эволюции системы. Система эволюционирует не в направлении максимальной вероятности своего состояния в последующий момент времени, а в направлении максимальной вероятности процесса эволюции. Это означает, что минимизируется количество информации, заключающееся в процессе. Возможно, это иная форма принципа наименьшего действия, и квант действия есть один бит информации.

В рассмотренной простейшей модели предгеометрии бинарными альтернативами являются петли специального вида в ориентированном графе. В модели, претендующей на адекватное описание реальности, структуры предгеометрии, которые соответствуют бинарным альтернативам, должны определяться фундаментальным принципом динамики микромира. Этот принцип определяет и конкретный вид предгеометрии. Поиск такого принципа является главной задачей дальнейшего исследования.

Автор выражает благодарность своей супруге В. Г. Кошеляевой за большую техническую помощь в подготовке настоящей работы.

# Список литературы

[1] Садбери А. Квантовая механика и физика элементарных частиц. - М.: Мир, 1989.- 488 с.

[2] Рязанов Г.В. Квантовомеханические вероятности как суммы по путям// ЖЕТФ. - 1958. - т 35. - в. 1(7). - с. 121 - 131.

[3] Surya, S. and Wallden, P. Quantum Covers in Quantum Measure Theory. arXiv: 0809.1951 [quant-ph].

[4] Smolin, L. Matrix universality of gauge and gravitational dynamics. arXiv: 0803.2926 [hep-th].

[5] Smolin L. Matrix models as non-local hidden variables theories. arXiv: hep-th/0201031.

[6] Myrheim, J. Statistical Geometry. CERN preprint TH-2538. - 1978. - 13 p.

[7] Bombelli, L., Lee, J., Meyer, D. and Sorkin, R.D. Space-time as a causal set// Physical Review Letters. - 1987. - 59. - pp. 521 - 524.

[8] Sorkin, R. D. Spacetime and causal set// Relativity and Gravitation: Classical and Quantum. Proceedings of the SILARG VII Conference: Cocoyoc, Mexico, December, 1990. Ed. by D'Olivo, J.C., Nahmad-Achar, E., Rosenbaum, M., Ryan, M., Urrutia, L. and Zertuche, F. - 1991. - pp. 150 - 173.

[9] Finkelstein, D. "Superconducting"causal net// International Journal of Theoretical Physics. - 1988. - 27. - pp. 473 - 519.

[10] Rideout, D. P. and Sorkin, R. D. A classical sequential growth dynamics for causal sets// Physical Review. - 2000. - D61. - pp. 024002-1 - 024002-16. (arXiv: gr-qc/9904062).

[11] Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация, т. 3. - Бишкек: Айнштайн, 1997. - 510 с.

[12] Werner, F.G., remark to J.A. Wheeler on June 3 at the Cincinnati, Ohio, Relativity Conference in the Midwest, 1969.

[13] Finkelstein, D. and McCollum, G. Unified quantum theory// Quantum theory and the structures of time and space. Vol.1/ Ed. by Castell, L., Drieschner, M., and von Weizsäcker, C. F. - Münhen, Wienna: Hauser, 1975. - pp. 15 - 54.

[14] von Weizsäcker, C. F. The philosophy of alternatives// Quantum theory and the structures of time and space. Vol.1/ Ed. by Castell, L., Drieschner, M., and von Weizsäcker, C. F. - Münhen, Wienna: Hauser, 1975. - pp. 213 - 230.

[15] Finkelstein, D. and McCollum, G. Concept of particle in quantum mechanics// Quantum theory and the structures of time and space. Vol.2/ Ed. by Castell, L., Drieschner, M., and von Weizsäcker, C. F. - Münhen: Hauser, 1977. - pp. 46 - 85.

[16] von Weizsäcker, C. F. Binary alternatives and space-time structure// Quantum theory and the structures of time and space. Vol.2/ Ed. by Castell, L., Drieschner, M., and von Weizsäcker, C. F. - Münhen: Hauser, 1977. - pp. 86 - 112.

[17] von Weizsäcker, C. F. A reconstruction of quantum theory// Quantum theory and the structures of time and space. Vol.2/ Ed. by Castell, L., Drieschner, M., and von Weizsäcker, C. F. - Münhen: Hauser, 1979. - pp. 7 - 35.

[18] Круглый А.Л. Модель дискретного пространства-времени. - М.: Монолог, 1998. - 56 с.

[19] Круглый А.Л. Модель динамики дискретного пространства-времени. - М.: Монолог, 2000. - 88 с.

[20] Krugly, A.L. Discrete space-time// International Journal of Theoretical Physics. - 2000. - 39(4). - pp. 975 - 984.

[21] Krugly, A.L. Causal set dynamics and elementary particles// International Journal of Theoretical Physics. - 2002. - 41(1). - pp. 1 - 37.

[22] Круглый А.Л. Динамика ориентированного графа в модели Соркина - Финкельштейна. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - М.: Российский университет дружбы народов, 2004. - 106 с. 40.

[23] Bilson-Thompson, S.O. A Topological Model of Composite Preons. arXiv: hep-ph/0503213.

[24] Bilson-Thompson, S.O., Markopoulou, F., Smolin, L. Quantum Gravity and the Standard Model// Class. Quant. Grav. - 2007. - 24. - pp. 3975-3994. (arXiv: hep-th/0603022).

[25] Bilson-Thompson, S.O., Hackett, J., Kauffman, L., Smolin, L. Particle Identifications from Symmetries of Braided Ribbon Network Invariants. arXiv: 0804.0037 [hep-th].

**Abstract**

Quantum amplitudes are a consequence of elementary probability theory
A.L. Krugly
I suppose that quantum objects obey elementary probability theory. I consider a connection of elementary probability theory and complex quantum amplitudes by a matrix calculus. A special case of a discrete pregeometry is an example of this approach.