КОНЦЕПЦИЯ ОПЕРАЦИОННОЙ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ В ПРИЛОЖЕНИИ К МОДЕЛИ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Ершков С.В.

В настоящей работе продолжается цикл исследований о характере эволюционных процессов [1-2], изучаемых в различных областях механики и динамики, в приложении к модели твёрдого тела.

В работах [2-4] детально исследованы основные уравнения динамики и механики (*в т.ч., квантовой механики*) с точки зрения операционной автомодельности [1], а именно:

- Система уравнений Эйнштейна-Фридмана, описывающая простейшую космологическую модель эволюции Вселенной,
- Система полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа,
- Система уравнений электро-магнитной динамики Максвелла,
- Квантово-механическое уравнение Шрёдингера.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о топологическом подобии рассмотренных эволюционных моделей (уравнений): их решения подобны друг другу и решениям уравнений типа Риккати.

Поскольку концепция операционной автомодельности [1] подразумевает независимость от масштабов в исследуемой модели, в [2] предложена следующяя схема условного разделения (представлений):

1. Микро-Мир:

   Времени не существует, его роль (фактически) играет волновая функция состояния Ψ, полностью описывающая квантово-механическое состояние объекта исследования в заданной точке пространства. Изменение состояния отдельно взятой частицы описывается уравнением Шрёдингера.

2. Мезо-Мир:

Время многолико, схема его моделирования зависит от рассматриваемого процесса, параметризуется через энтропию и/или через динамические инварианты протекающего процесса.

При этом факт приводимости к уравнениям типа Риккати основных уравнений механики жидкости и газа (уравнений Навье-Стокса), а также электро-магнитной динамики Максвелла установлен в варианте операционной автомодельности в работах [3] и [4] соответственно.

3. Макро-Мир:

   Современные представления об эволюции Вселенной восходят к простейшей космологической модели Эйнштейна-Фридмана, оперирующей с трехмерным неэвклидовым пространством переменного во времени радиуса кривизны ***R(t)***. Указанное пространство предполагается в этой модели однородным и изотропным, а время выступает в качестве формального параметра.

Учитывая приведенную схему *условного* разбиения эволюционных процессов на классы по масштабам области их протекания, нам необходимо рассмотреть более подробно случай 2) на предмет изучения эволюционных моделей твёрдого тела (*как наименее изученный с точки зрения операционной автомодельности* [2]).

Действительно, в этом классе моделей (Мезо-Мир) нами уже были подробно рассмотрены следующие состояния вещества:

1. **Жидкость** (*уравнения Эйлера несжимаемой жидкости, которые могут быть получены предельным переходом из уравнений Навье-Стокса*).

2. **Газ** (*факт приводимости к уравнениям типа Риккати уравнений Навье-Стокса установлен в варианте операционной автомодельности в работе* [3]).

3. **Плазма** (*уравнения Навье-Стокса + уравнения Максвелла; факт приводимости к уравнениям типа Риккати уравнений электро-магнитной динамики Максвелла установлен в варианте операционной автомодельности в работе* [4]).

Таким образом, остается рассмотреть эволюционные модели, изучаемые физикой **Твёрдого Тела**, чтобы убедиться в глобальном топологическом подобии большинства эволюционных процессов, изучаемых в различных областях механики, динамики, и физики вообще.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ВРАЩЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА.

Выпишем общий вид системы уравнений Эйлера [5], описывающей изменение компонент вектора угловой скорости вращения твёрдого тела $\boldsymbol{\Omega}$ в подвижной системе координат, с осями, направленными по главным осям инерции твёрдого тела:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\cdot\Omega_2\cdot\Omega_3 &= K_1, \\ I_2 \cdot \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\cdot\Omega_1\cdot\Omega_3 &= K_2, \\ I_3 \cdot \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\cdot\Omega_1\cdot\Omega_2 &= K_3, \end{aligned} \qquad (1.1)$$

- здесь введены следующие обозначения:

$I_1, I_2, I_3 \neq 0,$ − моменты инерции твёрдого тела по главным осям инерции;

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3,$ − компоненты вектора угловой скорости вращения;

$K_1, K_2, K_3,$ − компоненты вектора момента внешних сил.

Домножим каждое из приведенных уравнений на Ω_i (*i = 1, 2, 3 соответственно*), и перепишем систему (***1.1***) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Omega_1\cdot\frac{d\Omega_1}{dt} + \left(\frac{I_3 - I_2}{I_1}\right)\cdot\Omega_1\cdot\Omega_2\cdot\Omega_3 &= \left(\frac{K_1}{I_1}\right)\cdot\Omega_1, \\ \Omega_2\cdot\frac{d\Omega_2}{dt} + \left(\frac{I_1 - I_3}{I_2}\right)\cdot\Omega_1\cdot\Omega_2\cdot\Omega_3 &= \left(\frac{K_2}{I_2}\right)\cdot\Omega_2, \\ \Omega_3\cdot\frac{d\Omega_3}{dt} + \left(\frac{I_2 - I_1}{I_3}\right)\cdot\Omega_1\cdot\Omega_2\cdot\Omega_3 &= \left(\frac{K_3}{I_3}\right)\cdot\Omega_3, \end{aligned}$$

- или, другими словами ($I_1 \neq I_2$, $I_2 \neq I_3$, $I_1 \neq I_3$):

$$\left(\frac{I_1}{I_3-I_2}\right)\cdot\left\{\left(\frac{K_1}{I_1}\right)\cdot\Omega_1 - \Omega_1\cdot\frac{d\Omega_1}{dt}\right\} = \Omega_1\cdot\Omega_2\cdot\Omega_3 = \left(\frac{I_2}{I_1-I_3}\right)\cdot\left\{\left(\frac{K_2}{I_2}\right)\cdot\Omega_2 - \Omega_2\cdot\frac{d\Omega_2}{dt}\right\},$$

$$\left(\frac{I_2}{I_1-I_3}\right)\cdot\left\{\left(\frac{K_2}{I_2}\right)\cdot\Omega_2 - \Omega_2\cdot\frac{d\Omega_2}{dt}\right\} = \Omega_1\cdot\Omega_2\cdot\Omega_3 = \left(\frac{I_3}{I_2-I_1}\right)\cdot\left\{\left(\frac{K_3}{I_3}\right)\cdot\Omega_3 - \Omega_3\cdot\frac{d\Omega_3}{dt}\right\},\qquad (1.2)$$

- т.е. переменные разделились. Это позволяет нам сделать вывод, что первое уравнение системы (***1.2***) задает (*определяет*) *существенно нелинейную* связь между переменными Ω_1 и Ω_2, а второе уравнение - между переменными Ω_2 и Ω_3.

Кроме того, введя обозначение:

$$\Omega_1\cdot\Omega_2\cdot\Omega_3 = f(t),$$

мы можем переписать систему уравнений (***1.2***) следующим образом:

$$\left(\frac{I_1}{I_3-I_2}\right)\cdot\left\{\left(\frac{K_1}{I_1}\right)\cdot\Omega_1 - \Omega_1\cdot\frac{d\Omega_1}{dt}\right\} = f(t),$$

$$\left(\frac{I_2}{I_1-I_3}\right)\cdot\left\{\left(\frac{K_2}{I_2}\right)\cdot\Omega_2 - \Omega_2\cdot\frac{d\Omega_2}{dt}\right\} = f(t),\qquad (1.3)$$

$$\left(\frac{I_3}{I_2-I_1}\right)\cdot\left\{\left(\frac{K_3}{I_3}\right)\cdot\Omega_3 - \Omega_3\cdot\frac{d\Omega_3}{dt}\right\} = f(t)\ .$$

Из общего вида уравнений системы (***1.3***) мы можем сделать вывод, что если решение системы (***1.1***) существует (*в общем случае*), то изменение во времени каждой его компоненты описывается уравнением одного и того же вида ($i = 1, 2, 3$):

$$\Omega_i\cdot\frac{d\Omega_i}{dt} = \left(\frac{K_i}{I_i}\right)\cdot\Omega_i - C_i\cdot f(t),$$

$$(1.4)$$

$$C_1 = \left(\frac{I_3-I_2}{I_1}\right),\ C_2 = \left(\frac{I_1-I_3}{I_2}\right),\ C_3 = \left(\frac{I_2-I_1}{I_3}\right).$$

Последнее уравнение является уравнением Абеля 2-ого рода [6], своего рода обобщением уравнений типа Риккати. Это означает, что искомое решение существует непрерывным образом только в определенном диапазоне значений $\boldsymbol{t}$, или, другими словами, претерпевает разрыв при некотором $\boldsymbol{t = t_0}$ (*аналогично случаям, рассмотренным в* [2-4]).

Как известно [6], одно или даже все решения уравнений типа Риккати могут быть найдены аналитическими методами в крайне ограниченном числе случаев. В частности, решения уравнения (***1.4***) могут быть легко выписаны при выполнении одного из следующих условий (*для всех* $\boldsymbol{t \geq 0}$):

- случай свободного вращения: $\boldsymbol{K_i = 0}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, 3}$,
- вращение симметричного тела: $\boldsymbol{I_1 = I_2}$, либо $\boldsymbol{I_2 = I_3}$; т.е. $\boldsymbol{C_i = 0}$ при каком-нибудь $\boldsymbol{i}$.

При этом остается ещё один случай, не рассматривавшийся ранее, а именно: задаётся (определяется) связь между $(\boldsymbol{K_i/I_i})$, $\boldsymbol{C_i}$ и $\boldsymbol{f(t)}$, облегчающая интегрирование уравнения (***1.4***). Один из способов определения подобной связи приводится ниже.

Произведя в уравнении (***1.4***) замену $\boldsymbol{y(t) = 1/\Omega_i(t)}$, мы получаем уравнение Абеля 1-ого рода:

$$\frac{dy}{dt} = C_i \cdot f(t) \cdot y^3 - \tilde{K}_i(t) \cdot y^2, \quad \tilde{K}_i(t) = \frac{K_i(t)}{I_i(t)} .$$

Согласно [6], §4, п.4.10(е), последнее уравнение сводится подстановкой

$$y = \left(\frac{-\tilde{K}_i(t)}{C_i \cdot f(t)}\right) \cdot u(t) ,$$

к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\tilde{K}_i^2(t)}{C_i \cdot f(t)}\right) \cdot \left\{u^3 + u^2 + C_i \cdot u\right\} \tag{1.5}$$

в том случае, если выполняется следующее условие:

$$\left(\frac{C_i \cdot f(t)}{-\tilde{K}_i(t)}\right)' = const \cdot \left(-\tilde{K}_i(t)\right) .$$

Последнее условие означает (*при соответствующем выборе констант*), что

$$f(t) = \widetilde{K}_i(t) \cdot \int \widetilde{K}_i(t) dt \ , \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (1.6)$$

- или, другими словами:

$$f(t) = \widetilde{K}_1(t) \cdot \int \widetilde{K}_1(t) dt = \widetilde{K}_2(t) \cdot \int \widetilde{K}_2(t) dt = \widetilde{K}_3(t) \cdot \int \widetilde{K}_3(t) dt \ .$$

Отсюда следует

$$\left(\left\{ \int \widetilde{K}_1(t) dt \right\}^2 \right)' = \left(\left\{ \int \widetilde{K}_2(t) dt \right\}^2 \right)' = \left(\left\{ \int \widetilde{K}_3(t) dt \right\}^2 \right)' \ ,$$

- что в свою очередь приводит, с учётом самосогласованности воздействия

$$\widetilde{K}_1(t) = \widetilde{K}_2(t) = \widetilde{K}_3(t) \ .$$

моментов внешних сил на вращение твёрдого тела, к условию равенства всех компонент моментов (*отнормированных на соответствующие моменты инерции*):

Это означает, что временная составляющая всех компонент моментов внешних сил (*отнормированных на соответствующие моменты инерции*) одинаково меняется с течением времени. Обязательное выполнение подобного условия возможно только лишь в том случае, если это изменение обусловлено изменением поля внешних сил:

$$\widetilde{K}_1(t) = \widetilde{K}_2(t) = \widetilde{K}_3(t) = K(t) ,$$

$$\sum F = F(t) \cdot \sum F(x_1, x_2, x_3) \ ,$$

$$F(t) = K(t) .$$

Теперь, с учётом уравнения (***1.5***) и условия (***1.6***), мы можем выписать окончательное представление решения:

$$\frac{du}{u \cdot \left\{ u^2 + u + C_i \right\}} = \left(\frac{1}{C_i} \right) \cdot d\left(ln \int K(t) dt \right) ,$$

откуда:

$$\left(\frac{1}{2C_i} \right) \cdot ln \left\{ \frac{u^2}{\left\{ u^2 + u + C_i \right\}} \right\} - \left(\frac{1}{2C_i} \right) \cdot \int \frac{du}{\left\{ u^2 + u + C_i \right\}} = \left(\frac{1}{C_i} \right) \cdot ln \int K(t) dt \ ,$$

здесь

$$\int \frac{du}{\left\{ u^2 + u + C_i \right\}} = \frac{2}{\sqrt{4C_i - 1}} \cdot arctg \left(\frac{2u + 1}{\sqrt{4C_i - 1}} \right) , \quad \left(4C_i - 1 \right) \geq 0$$

$$\int \frac{du}{\left\{ u^2 + u + C_i \right\}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4C_i}} \cdot ln \left(\frac{2u + 1 - \sqrt{1 - 4C_i}}{2u + 1 + \sqrt{1 - 4C_i}} \right) , \quad \left(4C_i - 1 \right) < 0 .$$

Рассмотрим более подробно второй случай из двух представленных выше (*например, это может означать следующее: тело по форме “близко” к симметричной форме эллипсоида вращения, но всё-таки несовершенно – имеются бугры и впадины на поверхности*):

Кроме того, в соответствии с принятыми выше обозначениями:

$$\Omega_i(t) = -C_i \cdot \int K(t)dt \cdot \frac{1}{u_i(t)} \quad .$$

Последнее выражение определяет общий вид всех трёх компонент угловой скорости вращения, при этом выражение для $u_i(t)$ определяется из выражения

$$\frac{u^2}{\left\{u^2 + u + C_i\right\}} \cdot \left\{\frac{2u + 1 + \sqrt{1-4C_i}}{2u + 1 - \sqrt{1-4C_i}}\right\}^{\frac{1}{\sqrt{1-4C_i}}} = \left(\int K(t)dt\right)^2 \qquad (1.7)$$

(*1.7*) посредством решения алгебраического уравнения (*в общем случае, численными методами*) с учётом того, что для каждого i вид констант C_i будет различным.

Список использованной литературы:

1. Ершков С.В. Топологические аспекты динамического подобия в моделировании Времени // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_topologich/yershkov_topologich.htm
2. Ершков С.В. Параметрическая коррекция представлений о характере эволюционных преобразований // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_parametricheskaya.pdf
3. Ершков С. В., Щенников В. В. Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 7. С. 1117 – 1124.
4. Быркин А.П., Ершков С.В., Щенников В.В. Конически автомодельные решения уравнений Максвелла с кручением электро-магнитного поля // Материалы 3-его совещания по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро-космических приложениях. М.: Институт высоких температур РАН. Апрель 2001. С.377–380.

5. Купер Леон Н. Физика для всех (введение в сущность и структуру физики) М.: ”Мир”.1973. Т. 1 “Классическая физика”.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.: Наука. 1971.