

**Основные уравнения динамики с точки зрения операционной
автомодельности**
С. В. Ершков

В настоящей работе приводится расширение представлений о характере эволюционных преобразований, рассмотренных в работе [1].

В работе [1] предложена новая концепция Времени как процесса топологических преобразований Вселенной *всеобъемлющего* характера.

Сформулированы основные принципы (аспекты) динамического подобия процесса эволюционных преобразований, введена схема энтропийной параметризации в равномерной операторной топологии, установлен факт зависимости темпа протекания эволюционного процесса от ранга топологии. При этом динамическое подобие понимается как операционная автомодельность исследуемой системы [1-3].

В данной работе предлагается детальное исследование основных уравнений динамики и механики (*в т.ч., квантовой механики*), позволяющее с уверенностью утверждать, что идея общности всех эволюционных процессов находит свое подтверждение также и при изучении внутренней структуры этих уравнений. Они топологически подобны (*в смысле операционной автомодельности* [1-3]).

А именно, все рассмотренные процессы, несмотря на то что описываются различными уравнениями, тем не менее, наделены рядом общих черт.

Более того: при определенных условиях все они приводятся к системе уравнений типа Риккати [4].

Поскольку концепция операционной автомодельности [1] подразумевает, в первую очередь, независимость от масштабов в исследуемой модели, мы будем придерживаться следующего условного разделения (представлений):

1. Микро-Мир (*масштаб, сравнимый с длиной волны солнечного света*):

Времени не существует, его роль (фактически) играет волновая функция состояния Ψ , полностью описывающая квантово-механическое состояние объекта исследования в заданной точке пространства. Изменение состояния отдельно взятой частицы описывается уравнением Шредингера [5].

2. Мезо-Мир (*масштаб, сравнимый с длиной радио-волн*):

Время многолико, схема его моделирования зависит от рассматриваемого процесса, параметризуется через энтропию и/или через динамические инварианты протекающего процесса [1].

При этом факт приводимости к уравнениям типа Риккати основных уравнений механики жидкости и газа (уравнений Навье-Стокса), а также электро-магнитной

динамики Максвелла установлен в варианте операционной автомодельности в работах [2] и [3] соответственно.

3. Макро-Мир (*масштаб, сравнимый с размерами планетарных систем в космосе*):
Современные представления об эволюции Вселенной восходят к простейшей космологической модели Эйнштейна-Фридмана [6], оперирующей с трехмерным неевклидовым пространством переменного во времени радиуса кривизны $R(t)$. Указанное пространство предполагается в этой модели однородным и изотропным, а время выступает в качестве формального параметра. При этом на ранних этапах эволюции Вселенной применима концепция квантовой космологии [7].

Учитывая приведенную схему *условного разбиения* эволюционных процессов на классы по масштабам области их протекания, нам необходимо рассмотреть более подробно случаи 1) и 3), как наименее изученные с точки зрения операционной автомодельности [1].

При этом исследование квантово-механического уравнения Шредингера [5] мы приведем в его стационарном варианте, поскольку, в случае независимости потенциала частицы (*потенциальной энергии, входящей в уравнение Шредингера*) от времени, нестационарные автомодельные решения могут быть получены из стационарных

умножением на экспоненциальный множитель $e^{-\frac{i}{\hbar} \cdot E \cdot t}$, где E – полная энергия квантовой

системы, $i = \sqrt{-1}$, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек – постоянная Планка.

СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА.

Выпишем общий вид стационарного ($\partial / \partial t = 0$) уравнения Шредингера [5] в сферической системе координат R, θ, ϕ , описывающего изменение состояния отдельно взятой частицы в рассматриваемой области пространства, в поле потенциальных сил:

- здесь введены следующие обозначения:

m – масса частицы, $m = const \neq 0$; ψ - волновая функция частицы, полностью описывающая ее квантовомеханическое состояние в данной точке пространства, $\psi = \psi(R, \theta, \phi)$; $U = (V - E)$, где V – потенциальная энергия (потенциал) частицы, E – полная энергия квантовой системы, $U = U(R, \theta, \phi)$; \hbar – постоянная Планка.

Кроме того, здесь:

При этом значение квадрата волновой функции, согласно общепринятым представлениям, можно отождествить с вероятностью (на единицу объема)

обнаружить рассматриваемую частицу в данной точке пространства. Но, согласно принципу Паули, в одном и том же состоянии, - полностью определяемом волновой функцией, - не может находиться более одной частицы. Поэтому не существует классического аналога уравнения (1.1).

Обобщая выстраиваемые решения (*с учетом специфики изучаемого явления*) на случай отклонения от осевой симметрии ($\partial/\partial\varphi \neq 0$), и следуя при этом общей концепции топологической автомодельности [1-3], будем представлять функции, входящие в исходное уравнение, в подобном виде (здесь α, β - константы автомодельности; a_1, a_2 - параметры неосесимметрии):

После подстановки представлений (1.2) в уравнение (1.1), - при соответствующем выборе констант автомодельности и параметров неосесимметрии: $\beta = 2, a_2 = 0$, - получим обыкновенное дифференциальное уравнение II -ого порядка, следующего вида ($a_1 \neq 0$):

- которое может быть сведено заменой $f(\theta) = \psi'(\theta)/\psi(\theta)$ к уравнению типа Риккати [4]. Это означает, что искомое решение существует непрерывным образом только в определенном диапазоне значений θ , или, другими словами, претерпевает разрыв на некотором луче θ_0 .

Последний результат может быть ассоциирован с возможностью проявления (возникновения) мгновенного перехода частицы из одного квантовомеханического состояния – в другое, что связано со скачкообразным, Риккатиевого типа изменением волновой функции.

Кроме того, смена топологии решения (*при изменении значения параметра автомодельности α*) также может привести к внезапному (скачкообразному) переходу частицы из одного квантовомеханического состояния – в другое.

При этом выбор константы автомодельности $\beta = 2$ означает, что потенциальная энергия частицы в данной точке пространства V отличается от полной энергии квантовой системы E на некий довесок $\sim (1/R^2)$, который может быть ассоциирован (связан) с воздействием на частицу поля центробежных сил.

Как уже отмечалось выше, значение квадрата волновой функции можно отождествить с вероятностью (на единицу объема) обнаружить рассматриваемую частицу в данной точке пространства. Это означает, что интеграл квадрата

волновой функции по всему объему рассматриваемого пространства должен быть равен единице. Последнее требование накладывает определенные ограничения на выбор констант α и a_1 . При этом, в случае расходимости интегралов по переменным R , θ или ϕ , необходимо произвести нормировку волновой функции частицы ψ на δ -функцию Дирака.

УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА-ФРИДМАНА.

В соответствии с [6], современные представления об эволюции Вселенной восходят к простейшей космологической модели Эйнштейна-Фридмана, оперирующей с трехмерным неевклидовым пространством переменного во времени радиуса кривизны R (сферической гиперповерхностью 4-мерного евклидового шара). Указанное пространство предполагается в этой модели изотропным и заполненным “пылевидной” материи, а время выступает в качестве формального параметра, от которого и зависит “текущая” кривизна пространства. Уравнения Фридмана-Эйнштейна записываются в виде:

- здесь введены следующие обозначения: G – постоянная в законе всемирного тяготения Ньютона, c – скорость света, ρ - плотность, P – давление, $k = 0, 1$ или -1 в зависимости от знака кривизны. Штрих здесь означает дифференцирование по времени. Исходя из необходимости учета гравитационного давления, будем считать в общем случае величину давления P в космологических уравнениях Эйнштейна отличной от нуля.

Рассмотрим вначале 2-ое уравнение приведенной выше системы. Перепишем его в следующем виде:

Если для решений $R(t)$ этого уравнения положить $\lambda(t) = R(t)/R'(t)$, то получаем:

Правая часть 1-ого равенства должна быть производной правой части второго равенства; это дает для $\lambda(t)$ уравнение Абеля [4]:

Это означает, что искомое решение претерпевает разрыв при некотором $t = t_0$ (аналогично случаям, рассмотренным в [2-3]). Заметим также, что полученное уравнение не зависит от знака k ($k \neq 0$).

Далее, комбинируя 1-ое и 2-ое уравнения приведенной выше системы, получаем:

Подстановка $R' = R \cdot u(t)$ приводит к следующему

- уравнению типа Риккати [4]. Это также означает, что искомое решение претерпевает разрыв при некотором $t = t_0$.

Последний результат может быть ассоциирован с возможностью проявления (возникновения) гравитационных ударных волн при расширении или сжатии Вселенной; причиной также могут служить скачки сжатия или уплотнения “пылевидной” материи, происходящие в рассматриваемой распределенной среде при эволюции Вселенной и приводящие, в итоге, к ударным волнам.

Таким образом, возможна *внезапная* смена эволюционного этапа расширения - этапом сжатия (или *наоборот*) во Вселенной при её развитии во времени, которая обусловлена скачкообразным, Риккатиевого типа изменением величины радиуса кривизны $R(t)$. Причиной этого, как уже отмечено выше, могут быть как гравитационные ударные волны, так и скачки сжатия/уплотнения “пылевидной” сплошной (*распределенной*) среды при эволюции Вселенной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Итак, нами были детально исследованы основные уравнения динамики и механики (в т.ч., *квантовой механики*) с точки зрения операционной автомодельности [1], а именно:

- Система уравнений Эйнштейна-Фридмана, описывающая простейшую космологическую модель эволюции Вселенной,
- Система полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа,
- Система уравнений электро-магнитной динамики Максвелла,
- Квантово-механическое уравнение Шредингера.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о топологическом подобии рассмотренных эволюционных моделей (уравнений) в смысле операционной автомодельности [1]: все они наделены рядом общих черт, а именно – их решения топологически подобны друг другу и решениям уравнений типа Риккати [4].

Учитывая все сказанное выше, мы можем скорректировать наши представления о характере эволюционных преобразований, предложенные в работе [1].

А именно: в основу исследования большинства эволюционных процессов может быть положено обобщенное операционное соотношение типа Риккати

- здесь, как и ранее, $0 \leq t < \infty$, $T(t)$ – операторозначная функция, $I(t)$ – свободный член (зависящий от рассматриваемого процесса), α - показатель автомодельности, K – масштабный множитель; производная операторозначной функции определяется, как обычно, через предел отношения вариации функционала и δt .

Для большинства процессов операторозначная функция $T(t)$ – функционал, некий существенный числовой инвариант изучаемой системы [1].

Как правило, в исследуемой эволюционной модели подобный существенный инвариант выбирается заранее, в силу специфики модели или из соображений подобия. Например, в уравнении Шредингера – это волновая функция состояния Ψ (а именно, комплекс Ψ'/Ψ), в космологической модели Эйнштейна-Фридмана - радиус кривизны R (отношение R'/R) и т.д.

В ряде случаев (в системах с необратимостью) в качестве подобного параметра может выступить энтропия исследуемой системы. При этом, учитывая экспоненциальное представление оператора $T(t)$ в смысле операционной автомодельности [1], нетрудно убедиться в том, что уравнение (3.1) сохраняет свою форму при линейных преобразованиях параметрического времени t . Это означает, что оно инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований сдвига, растяжения или сжатия.

Необходимо также отметить, что идея энтропийной параметризации эволюционных процессов высказывалась ранее в работах А.П. Левича [8].

Список использованной литературы:

1. Ершков С.В. Топологические аспекты динамического подобия в моделировании Времени // Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (опубликовано на сайте семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_topologich/yershkov_topologich.htm).
2. Ершков С. В., Щенников В. В. Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений

вязкого сжимаемого газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 7. С. 1117 – 1124.

3. Быркин А.П., Ершков С.В., Щенников В.В. Конические автомодельные решения уравнений Максвелла с кручением электро-магнитного поля // Материалы 3-его совещания по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро-космических приложениях. М.: Институт высоких температур РАН. Апрель 2001. С.377–380.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.: Наука. 1971.
5. Купер Леон Н. Физика для всех (введение в сущность и структуру физики) М.: "Мир".1973. Т. 1 "Классическая физика".
6. Шульман М.Х. Время как феномен расширения Вселенной // Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (опубликовано на сайте семинара по темпорологии: <http://www.chronos.msu.ru>).
7. Менский М.Б. Время как результат самоизмерения квантовой Вселенной // Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (опубликовано на сайте семинара по темпорологии: <http://www.chronos.msu.ru>).
8. Левич А.П. Метаболический и энтропийный подходы в моделировании времени // Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (опубликовано на сайте семинара по темпорологии [_](#)).