ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ КОРРЕКЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ХАРАКТЕРЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

В настоящей работе приводится расширение представлений о характере эволюционных преобразований, рассмотренных в работе [1].

В работе [1] предложена новая концепция Времени как процесса топологических преобразований Вселенной *всеобъемлющего* характера.

Сформулированы основные принципы (аспекты) динамического подобия процесса эволюционных преобразований, введена схема энтропийной параметризации в равномерной операторной топологии, установлен факт зависимости темпа протекания эволюционного процесса от ранга топологии. При этом динамическое подобие понимается как операционная автомодельность исследуемой системы [1-3].

В данной работе предлагается детальное исследование основных уравнений динамики и механики (*в т.ч., квантовой механики*), позволяющее с уверенностью утверждать, что идея общности всех эволюционных процессов находит свое подтверждение также и при изучении внутренней структуры этих уравнений. Они топологически подобны (*в смысле операционной автомодельности* [1-3]).

А именно, все рассмотренные процессы, несмотря на то что описываются различными уравнениями, тем не менее, наделены рядом общих черт.

Более того: при определенных условиях все они приводятся к системе уравнений типа Риккати [4].

Поскольку концепция операционной автомодельности [1] подразумевает, в первую очередь, независимость от масштабов в исследуемой модели, мы будем придерживаться следующего условного разделения (представлений):

1. Микро-Мир (*масштаб, сравнимый с длиной волны солнечного света*):

   Времени не существует, его роль (фактически) играет волновая функция состояния Ψ, полностью описывающая квантово-механическое состояние объекта исследования в заданной точке пространства. Изменение состояния отдельно взятой частицы описывается уравнением Шредингера [5].

2. Мезо-Мир (*масштаб, сравнимый с длиной радио-волн*):

   Время многолико, схема его моделирования зависит от рассматриваемого процесса, параметризуется через энтропию и/или через динамические инварианты протекающего процесса [1].
   При этом факт приводимости к уравнениям типа Риккати основных уравнений механики жидкости и газа (уравнений Навье-Стокса), а также электро-магнитной динамики Максвелла установлен в варианте операционной автомодельности в работах [2] и [3] соответственно.

3. Макро-Мир (*масштаб, сравнимый с размерами планетарных систем в космосе*):
   Современные представления об эволюции Вселенной восходят к простейшей космологической модели Эйнштейна-Фридмана [6], оперирующей с трехмерным неэвклидовым пространством переменного во времени радиуса кривизны $R(t)$. Указанное пространство предполагается в этой модели однородным и изотропным, а время выступает в качестве формального параметра. При этом на ранних этапах эволюции Вселенной применима концепция квантовой космологии [7].

Учитывая приведенную схему *условного* разбиения эволюционных процессов на классы по масштабам области их протекания, нам необходимо рассмотреть более подробно случаи 1) и 3), как наименее изученные с точки зрения операционной автомодельности [1].

При этом исследование квантово-механического уравнения Шредингера [5] мы приведем в его стационарном варианте, поскольку, в случае независимости потенциала частицы (*потенциальной энергии, входящей в уравнение Шредингера*) от времени, нестационарные автомодельные решения могут быть получены из стационарных умножением на экспоненциальный множитель $e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot E\cdot t}$, где E – полная энергия квантовой системы, $i = \sqrt{-1}$, $\hbar = 1{,}05\cdot 10^{-27}$ эрг·сек – постоянная Планка.

СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА.

Выпишем общий вид стационарного ($\partial / \partial t = 0$) уравнения Шредингера [5] в сферической системе координат $R,\ \theta,\ \varphi,$ описывающего изменение состояния отдельно взятой частицы в рассматриваемой области пространства, в поле потенциальных сил:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = U \psi , \qquad (1.1)$$

- здесь m – масса частицы, $m = const \neq 0;$ ψ - волновая функция частицы, полностью описывающая ее квантовомеханическое состояние в данной точке пространства, $\psi = \psi\ (R,\ \theta,\ \varphi);$ $U = (V - E),$ где V – потенциальная энергия (потенциал) частицы, E – полная энергия квантовой системы, $U = U\ (R,\ \theta,\ \varphi);$ $\hbar$ – постоянная Планка. Кроме того, здесь:

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} ctg\, \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad .$$

При этом значение квадрата волновой функции, согласно общепринятым представлениям, можно отождествить с вероятностью (на единицу объема) обнаружить рассматриваемую частицу в данной точке пространства. Но, согласно принципу Паули, в одном и том же состоянии, - полностью определяемом волновой функцией, - не может находиться более одной частицы. Поэтому не существует классического аналога уравнения (*1.1*).

Обобщая выстраиваемые решения (*с учетом специфики изучаемого явления*) на случай отклонения от осевой симметрии ($\partial/\partial\varphi \neq 0$), и следуя при этом общей концепции топологической автомодельности [1-3], будем представлять функции, входящие в исходное уравнение, в подобном виде (*здесь* $\alpha,\ \beta$ *- константы автомодельности;* $a_1,\ a_2$ *- параметры неосесимметрии*):

$$\psi(R, \theta, \varphi) = \frac{\psi(\theta)}{R^{\alpha}} exp(a_1 \varphi), \qquad (1.2)$$

$$U(R, \theta, \varphi) = \frac{U(\theta)}{R^{\beta}} exp(a_2 \varphi) \quad .$$

После подстановки представлений (*1.2*) в уравнение (*1.1*), - при соответствующем выборе констант автомодельности и параметров неосесимметрии: $\beta = 2,\ a_2 = 0$, - получим обыкновенное дифференциальное уравнение *II-ого* порядка, следующего вида ($a_1 \neq 0$):

$$\psi''(\theta) + \{ctg\,\theta\}\psi'(\theta) + \left\{\alpha(\alpha - 1) + \frac{a_1^2}{sin^2\theta} - \frac{2m}{\hbar^2}U(\theta)\right\}\psi(\theta) = 0\,, \qquad (1.3)$$

- которое может быть сведено заменой $f(\theta) = \psi'(\theta)/\psi(\theta)$ к уравнению типа Риккати [4]. Это означает, что искомое решение существует непрерывным образом только в определенном диапазоне значений θ, или, другими словами, претерпевает разрыв на некотором луче θ_0.

Последний результат может быть ассоциирован с возможностью проявления (возникновения) мгновенного перехода частицы из одного квантовомеханического состояния – в другое, что связано со скачкообразным, Риккатиевого типа изменением волновой функции.

Кроме того, смена топологии решения (*при изменении значения параметра автомодельности* α) также может привести к внезапному (скачкообразному) переходу частицы из одного квантовомеханического состояния – в другое.

При этом выбор константы автомодельности $\beta = 2$ означает, что потенциальная энергия частицы в данной точке пространства V отличается от полной энергии квантовой системы E на некий довесок ~ ($1/R^2$), который может быть ассоциирован (связан) с воздействием на частицу поля центробежных сил.

Как уже отмечалось выше, значение квадрата волновой функции можно отождествить с вероятностью (на единицу объема) обнаружить рассматриваемую частицу в данной точке пространства. Это означает, что интеграл квадрата волновой функции по всему объему рассматриваемого пространства должен быть равен единице. Последнее требование накладывает определенные ограничения на выбор констант α и a_1. При этом, в случае расходимости интегралов по переменным R, θ или φ, необходимо произвести нормировку волновой функции частицы ψ на δ–функкию Дирака.

УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА-ФРИДМАНА.

В соответствии с [6], современные представления об эволюции Вселенной восходят к простейшей космологической модели Эйнштейна-Фридмана, оперирующей с трехмерным неэвклидовым пространством переменного во времени радиуса кривизны R (*сферической гиперповерхностью 4-мерного эвклидового шара*). Указанное пространство предполагается в этой модели изотропным и заполненным “пылевидной” материей, а время выступает в качестве формального параметра, от которого и зависит “текущая” кривизна пространства. Уравнения Фридмана-Эйнштейна записываются в виде:

$$k\cdot(c/R)^2+(R'/R)^2+2(R''/R)=-8\cdot\pi\cdot G\cdot P/c^2\ , \qquad (2.1)$$

$$k\cdot(c/R)^2+(R'/R)^2=8\cdot\pi\cdot G\cdot\rho/3\ , \qquad (2.2)$$

- здесь введены следующие обозначения: G – постоянная в законе всемирного тяготения Ньютона, c – скорость света, ρ - плотность, P – давление, $k = 0, 1$ или -1 в зависимости от знака кривизны. Штрих здесь означает дифференцирование по времени. Исходя из необходимости учета гравитационного давления, будем считать в общем случае величину давления P в космологических уравнениях Эйнштейна отличной от нуля.

Рассмотрим вначале 2-ое уравнение приведенной выше системы. Перепишем его в следующем виде:

$$(R')^2-(8\pi\cdot G/3)\cdot\rho(t)\cdot R^2+k\cdot c^2=0\ .$$

Если для решений $R(t)$ этого уравнения положить $\lambda(t) = R(t)/R'(t)$, то получаем:

$$R'=\left(\frac{-k\cdot c^2}{1-(8\pi\cdot G/3)\cdot\rho(t)\cdot\lambda^2}\right)^{1/2}, \qquad R=\lambda\cdot\left(\frac{-k\cdot c^2}{1-(8\pi\cdot G/3)\cdot\rho(t)\cdot\lambda^2}\right)^{1/2}$$

Правая часть 1-ого равенства должна быть производной правой части второго равенства; это дает для $\lambda(t)$ уравнение Абеля [4]:

$$\lambda'=C_0\cdot\rho'(t)\cdot\lambda^3+2C_0\cdot\rho(t)\cdot\lambda^2+1\ , \quad C_0=-(4\pi\cdot G/3) \qquad (2.3)$$

Это означает, что искомое решение претерпевает разрыв при некотором $t = t_0$ (*аналогично случаям, рассмотренным в* [2-3]). Заметим также, что полученное уравнение не зависит от знака k ($k \neq 0$).

Далее, комбинируя 1-ое и 2-ое уравнения приведенной выше системы, получаем:

$$R''/R = -(4\pi \cdot G/3) \cdot \left(\rho + 3P/c^2\right).$$

Подстановка $R' = R \cdot u(t)$ приводит к следующему

$$u' = -u^2 - C_0 \cdot \left(\rho + 3P/c^2\right), \quad C_0 = 4\pi \cdot G/3 \qquad (2.4)$$

- уравнению типа Риккати [4]. Это также означает, что искомое решение претерпевает разрыв при некотором $t = t_0$.

Последний результат может быть ассоциирован с возможностью проявления (*возникновения*) гравитационных ударных волн при расширении или сжатии Вселенной; причиной также могут служить скачки сжатия или уплотнения "пылевидной" материи, происходящие в рассматриваемой распределенной среде при эволюции Вселенной и приводящие, в итоге, к ударным волнам.

Таким образом, возможна *внезапная* смена эволюционного этапа расширения - этапом сжатия (*или наоборот*) во Вселенной при её развитии во времени, которая обусловлена скачкообразным, Риккатиевого типа изменением величины радиуса кривизны $R(t)$. Причиной этого, как уже отмечено выше, могут быть как гравитационные ударные волны, так и скачки сжатия/уплотнения "пылевидной" сплошной (*распределенной*) среды при эволюции Вселенной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Итак, нами были детально исследованы основные уравнения динамики и механики (*в т.ч., квантовой механики*) с точки зрения операционной автомодельности [1], а именно:

- Система уравнений Эйнштейна-Фридмана, описывающая простейшую космологическую модель эволюции Вселенной,
- Система полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа,
- Система уравнений электро-магнитной динамики Максвелла,
- Квантово-механическое уравнение Шредингера.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о топологическом подобии рассмотренных эволюционных моделей (уравнений) в смысле операционной автомодельности [1]: все они наделены рядом общих черт, а именно – их решения топологически подобны друг другу и решениям уравнений типа Риккати [4].

Учитывая все сказанное выше, мы можем скорректировать наши представления о характере эволюционных преобразований, предложенные в работе [1].

А именно: в основу исследования большинства эволюционных процессов может быть положено обобщенное операционное соотношение типа Риккати

$$T'(t) = \left(\frac{T(t)}{K}\right)^{\alpha} + I(t), \qquad (3.1)$$

- здесь, как и ранее, $0 \le t < \infty$, $T(t)$ – операторозначная функция, $I(t)$ – свободный член (*зависящий от рассматриваемого процесса*), α - показатель автомодельности, K – масштабный множитель; производная операторозначной функции определяется, как обычно, через предел отношения вариации функционала и δt.

Для большинства процессов операторозначная функция $T(t)$ – функционал, некий *существенный* числовой инвариант изучаемой системы [1].

Как правило, в исследуемой эволюционной модели подобный существенный инвариант выбирается заранее, в силу специфики модели или из соображений подобия. Например, в уравнении Шредингера – это волновая функция состояния Ψ (а именно, комплекс Ψ'/Ψ), в космологической модели Эйнштейна-Фридмана - радиус кривизны R (отношение R'/R) и т.д.

В ряде случаев (в системах с необратимостью) в качестве подобного параметра может выступить энтропия исследуемой системы. При этом, учитывая экспоненциальное представление оператора $T(t)$ в смысле операционной автомодельности [1], нетрудно убедиться в том, что уравнение (*3.1*) сохраняет свою форму при линейных преобразованиях параметрического времени t. Это означает, что оно инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований сдвига, растяжения или сжатия.

Необходимо также отметить, что идея энтропийной параметризации эволюционных процессов высказывалась ранее в работах А.П. Левича [8].

Список использованной литературы:

1. Ершков С.В. Топологические аспекты динамического подобия в моделировании Времени // Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (опубликовано на сайте семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_topologich/yershkov_topologich.htm).
2. Ершков С. В., Щенников В. В. Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 7. С. 1117 – 1124.
3. Быркин А.П., Ершков С.В., Щенников В.В. Конически автомодельные решения уравнений Максвелла с кручением электро-магнитного поля // Материалы 3-его совещания по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро-космических

приложениях. М.: Институт высоких температур РАН. Апрель 2001. С.377–380.

4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.: Наука. 1971.
5. Купер Леон Н. Физика для всех (введение в сущность и структуру физики) М.: ”Мир”.1973. Т. 1 “Классическая физика”.
6. Шульман М.Х. Время как феномен расширения Вселенной // Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (опубликовано на сайте семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru). В оригинале этой работы указан знак “минус” перед членом $(2R''/R)$ в правой части первого из двух уравнений Эйнштейна-Фридмана. Здесь он изменен на “плюс”, что находится в полном соответствии с оргинальными представлениями Эйнштейна-Фридмана - см., например, более позднюю работу:

   - член-корр. РАН Волович И.В., академик Козлов В.В. О суммируемых с квадратом решениях уравнения Клейна-Гордона на многообразиях // Доклады Академии Наук. Математическая физика. 2006. Т. 408. № 3. С. 1 – 4.
7. Менский М.Б. Время как результат самоизмерения квантовой Вселенной // Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (опубликовано на сайте семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru).
8. Левич А.П. Метаболический и энтропийный подходы в моделировании времени // Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (опубликовано на сайте семинара по темпорологии http://www.chronos.msu.ru).