Операционная автомодельность: ограниченная задача 3-тел

С.В. Ершков

Настоящая работа продолжает цикл исследований природы Времени о взрывном характере эволюционных преобразований (*Риккатиевого типа*), с точки зрения концепции *операционной автомодельности* [1-2].

Исследован частный случай *ограниченной* задачи 3-тел, широко встречающийся на практике при взаимном движении тел в Солнечной системе.

Вполне естественные предпосылки позволяют описать асимптотику траектории движения малого тела (астероида) при приближении к другому малому телу, значительно превосходящему его по размерам и массе. При этом оба тела находятся под воздействием поля тяготения планеты-гиганта (Солнца).

Использованы следующие приближения:

- масса астероида m_3 много меньше массы планеты m_2, в поле тяготения которой он движется, а масса планеты m_2 много меньше массы Солнца m_1:

$$m_3 \ll m_2 \ll m_1,$$

- расстояние между астероидом и планетой много меньше расстояния между планетой и Солнцем: $|\boldsymbol{R}_{2,3}| \ll |\boldsymbol{R}_{1,2}|$.

В сделанных предположениях, уравнение движения астероида в поле тяготения двух гигантов - редуцируется к уравнению типа *Риккати*, с ограниченной областью существования непрерывного решения (*чтобы не перегружать читателя, все выкладки будут приведены в конце статьи*):

$$\boldsymbol{R}_{2,3}{}'' + \frac{\gamma m_1}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} \cdot \boldsymbol{R}_{2,3} = 0 \ .$$

А это означает что малое тело (астероид, комета) в определенный момент времени может *внезапно* изменить траекторию своего, казалось бы, устойчивого поступательного движения в определенном направлении.

Примером может служить внезапное попятное движение кометы Шумейкера-Леви. Комета при своем приближении к Юпитеру совершила гравитационный маневр – при этом гравитация Юпитера разорвала ее на 17 и более фрагментов – и весь этот ансамбль (осколков кометы) продолжил попятное движение, удаляясь от Юпитера. Затем траектория вновь изменилась на сближение с планетой-гигантом, и через некоторое время все 17 фрагментов с ярчайшими эффектами врезались в Юпитер, образовав серию гигантских пятен-воронок. Это один из фактов столкновения малого тела с планетой, которое удалось в подробностях пронаблюдать астрономам во всеоружии и полной готовности к этому событию (событие вызвало широкий резонанс в научной среде и освещалось весьма подробно СМИ).

Аналитическая справка [10]: Задача трёх тел - частная задача небесной механики, состоящая в определении относительного движения трёх тел (материальных точек), взаимодействующих по закону тяготения Ньютона (например, Солнца, Земли и Луны).

В общем случае *не существует решения этой задачи*. Известен ряд точных решений для специальных начальных скоростей и координат объектов. Во всех известных на данный момент точных решениях отношения расстояний между телами остаются неизменными (например, три решения коллинеарного типа, найденные Эйлером, два решения - в виде вращающегося равностороннего треугольника - которые нашел в 1772 году Лагранж) [11-12].

Ограниченная задача 3-тел [13] – упрощенный вариант задачи трех тел: тело пренебрежимо малой массы двигается под действием гравитационных полей двух гигантов, вращающихся вокруг общего центра масс, по заранее известным траекториям. *Она также не имеет аналитического решения* [13]. Есть только 1 интеграл движения в этом случае, т.н. интеграл Якоби (сохранение локальной кинетической энергии) [13-14].

Концепция операционной автомодельности [1-2] уже позволила объединить многие, казалось бы, весьма далекие разделы динамики, механики (*в т.ч., квантовой механики*) при помощи анализа основных эволюционных уравнений:

- Система уравнений Эйнштейна-Фридмана, описывающая простейшую космологическую модель эволюции Вселенной [2],
- Система полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа [3],
- Система уравнений электро-магнитной динамики Максвелла [4],
- Волновое уравнение: квантово-механическое уравнение Шрёдингера [5],
- Система уравнений Эйлера вращения твёрдого тела [6],
- Уравнение теплопроводности/диффузии [7],
- Логистическое уравнение популяционной динамики (*с учётом фактора сопротивления среды*) [8],
- Уравнение динамики сыпучих сред при свободном скольжении [9].

Приведенное здесь исследование позволяет присоединить данный раздел *небесной* механики к разделам, исследованным ранее с точки зрения *операционной автомодельности*, а также сделать вывод о *топологическом подобии* всех рассмотренных эволюционных моделей: их решения подобны друг другу и решениям уравнений типа *Риккати* [2-9].

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВЫКЛАДКИ:

Исходная система ОДУ задачи 3-тел, при заданных начальных условиях [11-12]:

$$m_1 \boldsymbol{q}_1'' = -\gamma \left\{ \frac{m_1 m_2 (\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^3} + \frac{m_1 m_3 (\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_3)}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_3|^3} \right\},$$

$$m_2 \boldsymbol{q}_2'' = -\gamma \left\{ \frac{m_2 m_1 (\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1)}{|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1|^3} + \frac{m_2 m_3 (\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3)}{|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3|^3} \right\},$$

$$m_3 \boldsymbol{q}_3'' = -\gamma \left\{ \frac{m_3 m_1 (\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1)}{|\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1|^3} + \frac{m_3 m_2 (\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_2)}{|\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_2|^3} \right\} ,$$

- здесь $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ - радиус-векторы тел с массами m_1, m_2, m_3, соответственно [12].

Поскольку основная задача небесной механики - это определение *относительного* движения 3-тел, перепишем систему в следующем виде (*линейная комбинация исходных уравнений*):

$$(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)'' + \gamma (m_1 + m_2) \frac{(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^3} = \gamma m_3 \left\{ \frac{(\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1)}{|\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1|^3} + \frac{(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3)}{|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3|^3} \right\},$$

$$(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3)'' + \gamma (m_2 + m_3) \frac{(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3)}{|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3|^3} = \gamma m_1 \left\{ \frac{(\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1)}{|\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1|^3} + \frac{(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^3} \right\},$$

$$(\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1)'' + \gamma (m_1 + m_3) \frac{(\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1)}{|\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1|^3} = \gamma m_2 \left\{ \frac{(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^3} + \frac{(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3)}{|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3|^3} \right\} .$$

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{R}_{1,2} = (\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2), \quad \boldsymbol{R}_{2,3} = (\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3), \quad \boldsymbol{R}_{3,1} = (\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1) \qquad (*)$$

В этих обозначениях, последняя система примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}_{1,2}'' + \gamma\,(m_1 + m_2)\,\frac{\boldsymbol{R}_{1,2}}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} = \gamma\, m_3 \left\{ \frac{\boldsymbol{R}_{3,1}}{\left|\boldsymbol{R}_{3,1}\right|^3} + \frac{\boldsymbol{R}_{2,3}}{\left|\boldsymbol{R}_{2,3}\right|^3} \right\}, \\
&\boldsymbol{R}_{2,3}'' + \gamma\,(m_2 + m_3)\,\frac{\boldsymbol{R}_{2,3}}{\left|\boldsymbol{R}_{2,3}\right|^3} = \gamma\, m_1 \left\{ \frac{\boldsymbol{R}_{1,2}}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} + \frac{\boldsymbol{R}_{3,1}}{\left|\boldsymbol{R}_{3,1}\right|^3} \right\}, \qquad (1.1) \\
&\boldsymbol{R}_{3,1}'' + \gamma\,(m_1 + m_3)\,\frac{\boldsymbol{R}_{3,1}}{\left|\boldsymbol{R}_{3,1}\right|^3} = \gamma\, m_2 \left\{ \frac{\boldsymbol{R}_{2,3}}{\left|\boldsymbol{R}_{2,3}\right|^3} + \frac{\boldsymbol{R}_{1,2}}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} \right\} .
\end{aligned}$$

Сложим теперь все три уравнения системы (1.1) вместе:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}_{1,2}'' + \boldsymbol{R}_{2,3}'' + \boldsymbol{R}_{3,1}'' + \gamma(m_1+m_2)\frac{\boldsymbol{R}_{1,2}}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} + \gamma(m_2+m_3)\frac{\boldsymbol{R}_{2,3}}{\left|\boldsymbol{R}_{2,3}\right|^3} + \gamma(m_1+m_3)\frac{\boldsymbol{R}_{3,1}}{\left|\boldsymbol{R}_{3,1}\right|^3} = \\
&= \gamma(m_1+m_2)\frac{\boldsymbol{R}_{1,2}}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} + \gamma(m_2+m_3)\frac{\boldsymbol{R}_{2,3}}{\left|\boldsymbol{R}_{2,3}\right|^3} + \gamma(m_1+m_3)\frac{\boldsymbol{R}_{3,1}}{\left|\boldsymbol{R}_{3,1}\right|^3} ,
\end{aligned}$$

Отсюда, и из условий (*), непосредственно следует:

$$\boldsymbol{R}_{1,2}'' + \boldsymbol{R}_{2,3}'' + \boldsymbol{R}_{3,1}'' = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R}_{1,2} + \boldsymbol{R}_{2,3} + \boldsymbol{R}_{3,1} = 0 \qquad (**)$$

Рассмотрим далее вариант движения тела с малой массой: $m_3 \ll m_1, m_2$. Основная гипотеза состоит в том что тело с малой массой m_3 не будет оказывать *существенного* влияния на взаимное движения гигантов m_1, m_2.

В этом случае правая часть 1-ого уравнения системы (*1.1*) *не должна тождественно отличаться от нуля*, а сама система редуцируется к следующему виду (*см.* (**)):

$$\boldsymbol{R}_{1,2}'' + \gamma\,(m_1 + m_2)\frac{\boldsymbol{R}_{1,2}}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} = 0\,,$$

$$\boldsymbol{R}_{2,3}'' + \gamma\, m_2 \frac{\boldsymbol{R}_{2,3}}{\left|\boldsymbol{R}_{2,3}\right|^3} = \gamma\, m_1 \left\{ \frac{\boldsymbol{R}_{1,2}}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} - \frac{\boldsymbol{R}_{1,2} + \boldsymbol{R}_{2,3}}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2} + \boldsymbol{R}_{2,3}\right|^3} \right\}, \qquad (1.2)$$

$$\boldsymbol{R}_{3,1} = -\boldsymbol{R}_{1,2} - \boldsymbol{R}_{2,3}\ .$$

Как известно, первое уравнение системы (*1.2*) описывает движение тела с *меньшей* массой m_2 по эллиптической траектории вокруг общего центра масс с другим, более массивным телом m_1 (*например, Юпитер, двигающийся вокруг Солнца*). Это означает что все компоненты вектора $\boldsymbol{R}_{1,2}$ известны/вычисляемы.

Рассмотрим далее *упрощенный* вариант системы (*1.2*), описывающий движение тела с массой: $m_2 \ll m_1$, с *дополнительным* условием $|\boldsymbol{R}_{2,3}| \ll |\boldsymbol{R}_{1,2}|$.

В этом случае 2-ое уравнение системы (*1.2*) может быть упрощено следующим образом (*используя теорему косинусов при разложении знаменателя в правой части; здесь A – угол между векторами $\boldsymbol{R}_{2,3}$ и $\boldsymbol{R}_{1,2}$*):

$$\boldsymbol{R}_{2,3}'' + \frac{\gamma m_1}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} \cdot \left(1 + 3\frac{\left|\boldsymbol{R}_{2,3}\right|}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|} \cdot \cos A \right) \cdot \boldsymbol{R}_{2,3} \cong -3\frac{\gamma m_1}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} \cdot \cos A \cdot \frac{\left|\boldsymbol{R}_{2,3}\right|}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|} \cdot \boldsymbol{R}_{1,2}\,,$$

- или, учитывая условие $|\boldsymbol{R}_{2,3}| \ll |\boldsymbol{R}_{1,2}|$:

$$\boldsymbol{R}_{2,3}'' + \frac{\gamma m_1}{\left|\boldsymbol{R}_{1,2}\right|^3} \cdot \boldsymbol{R}_{2,3} \cong 0 \ .$$

Последнее уравнение является уравнением типа *Рикатти* [2-9], а в случае *почти* неизменного значения $|\boldsymbol{R}_{1,2}|$ - *например, Юпитер движется вокруг Солнца по практически правильной круговой траектории* - уравнением колебательного типа.

References:

1. Ершков С.В. Топологические аспекты динамического подобия в моделировании Времени // МГУ (доклады семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_topologich/yershkov_topologich.htm).
2. Ершков С.В. Параметрическая коррекция представлений о характере эволюционных преобразований // МГУ (доклады семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_parametricheskaya.pdf).
3. Ершков С. В., Щенников В. В. Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 7. С. 1117 – 1124.
4. Быркин А.П., Ершков С.В., Щенников В.В. Конически автомодельные решения уравнений Максвелла с кручением электро-магнитного поля // Материалы 3-его совещания по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро-космических приложениях. М.: Институт высоких температур РАН. Апрель 2001. С.377–380.
5. Ершков С.В. Уравнение Шрёдингера // МГУ (доклады семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_uravnenie.pdf).

6. Ершков С.В. Концепция операционной автомодельности в приложении к модели твёрдого тела // МГУ (доклады семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_kontseptsia.pdf).
7. Ершков С.В. Операционная автомодельность: уравнение теплопроводности // МГУ (доклады семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_operatsionnaya.pdf).
8. Ершков С.В. Фактор сопротивления среды в моделях эволюционной динамики // МГУ (доклады семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_faktor.pdf).
9. Ершков С.В. Реологическое уравнение сыпучих сред при свободном скольжении // МГУ (доклады семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_reologicheskoye.pdf).
10. Ершков С.В. Связь Времени и гравитации в проблеме 3-тел // МГУ (доклады семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/ershkov_svyaz.html).
11. Дубошин Г.Н. Небесная Механика. Основные Задачи и Методы // Москва: “Наука”. 1968 (*справочник по Небесной Механике*).
12. Ершков С.В. Новое точное решение задачи 3-тел // МГУ (доклады семинара по темпорологии: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_zada4a.pdf).
13. Себехей В. Теория Орбит. Ограниченная Задача Трех Тел // Yale University, New Haven, Connecticut. Academic Press New-York and London. 1967 (*под ред. Дубошина Г.Н.*). - С. 26.
14. Bruns H. Ueber die Integrale der Vielkoerper-Problems // Acta math. Bd. 11 (1887), p. 25-96.