

Транзитивные области влияния (индукторные пространства) в трёх задачах математической физики и теории больших систем.

А. В. Коганов.

НИИСИ РАН, Москва, Россия.

При поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 10-01-00041а, 11-03-00035а

Рассматриваются три задачи теории распределённых процессов, решение которых можно получить, используя транзитивность областей влияния в пространстве, на котором определён физический процесс. Первоначально эти задачи возникли в математической физике, но впоследствии аналогичные вопросы возникли и в других областях математического моделирования и теории больших систем. 1. Устанавливаются необходимые и достаточные топологические условия наличия полной системы инвариантов в математической модели процесса. 2. Выводится уравнение диффузии в форме, согласованной с заданным ограничением на скорость распространения проникающей субстанции. В частности, для физики это означает согласованность с теорией относительности. Классическое уравнение диффузии предполагает наличие сколь угодно больших скоростей частиц и не является релятивистским. 3. Предлагается несколько строгих методов перехода в макроскопическом пределе от дискретных моделей, процессов определённых на графах, к непрерывным топологиям пространства-времени.

Топология, граф, индукторное пространство, распределённый процесс, инвариант, диффузия, теория относительности, макроскопический предел.

1. Введение.

В статье рассмотрены три известные проблемы из области математической физики и системного анализа.

Исследована возможность описания процессов в системе с помощью системы инвариантов в фазовом пространстве системы.

Предложена одна из моделей процессов диффузионного типа, которая согласована с требованиями ограничения скорости распространения. Это требование возникает, например, в теории относительности, в процессах биофизики и экономики.

Рассмотрен вопрос о переходе от процессов, определённых на дискретных (комбинаторных) пространствах из класса графов, к их непрерывным аналогам на топологических моделях пространства-времени. Последняя задача известна в физике как проблема макроскопического предела для дискретных систем взаимодействий. Но подобные проблемы возникают также при моделировании экологических, биологических, социальных, экономических и других типов больших систем.

В каждом из этих направлений удалось получить определенное продвижение, благодаря использованию топологических методов, заимствованных из аппарата теории моделей распределённых процессов. Такие модели возникают при изучении сложных систем с большим числом компонент, взаимодействующих друг с другом. К ним относятся как пространственно-временные физические процессы, так и информационные сети, биологические организмы и сообщества, технические комплексы и экономические системы. Одним из методов моделирования таких объектов является построение специальных топологий — индукторных пространств, которые моделируют ту пространственную структуру, на которой естественно описывать исследуемый процесс. Эти пространства описывают области влияния на каждый из элементов системы, состоящие из других элементов той же системы, включая и источники внешних

воздействий на систему. Главным свойством таких областей является транзитивность влияния. Оно состоит в том, что элементы системы могут передавать по цепочке воздействие на некоторый объект, входящий в систему (элемент или совокупность элементов). Единственное, что для этого требуется, это чтобы каждый элемент цепочки входил в область влияния следующего за ним элемента цепочки. Таким образом, правильно описанная система областей влияния должна быть замкнута относительно операции расширения областей влияния по таким цепочкам. Это свойство положено в основу определения класса индукторных пространств. Он включает в себя как классические топологии всех типов, так и все виды графов, включая бесконечные, и пространства, которые не могут быть описаны как классические топологии или графы, но имеют интерпретацию в реальных системах взаимодействия.

Подробно теоретический аппарат индукторных пространств изложен в работах [3.1][3.2][3.3]. В приложениях обычно достаточно описать конструкцию нужного пространства, после чего задача решается средствами специальных разделов математики применительно к построенному индукторному пространству. В этом смысле индукторные пространства дают удобный аппарат для полезных дополнительных построений и позволяют давать строгие формулировки исходных содержательных прикладных задач. Для удобства читателя ниже приводится определение необходимых понятий теории и формулировки теорем, которые дают мотивировку применения этого аппарата в рассмотренных задачах.

Рассмотрим содержательную интерпретацию. Если задана реальная система, элементы которой обмениваются сигналами, веществом или энергией (далее — сигналы), то каждый элемент системы характеризуется набором подмножеств элементов, которые своими сигналами в совокупности определяют эволюцию состояния данного элемента. Один элемент может иметь несколько таких подмножеств (областей влияния, индукторов). В этом случае реакция элемента должна быть согласована по сигналам из разных индукторов, и это накладывает ограничение на совокупность возможных состояний всей системы. В математической модели удобно иметь расширение системы, рассматривая в качестве разных элементов образы одного элемента в разные моменты времени. Такое расширение системы называется пространством-временем исходной системы, а его элементы — точками пространства времени или элементарными событиями. Каждое такое событие выражает тот факт, что некоторый элемент системы в данный момент времени имеет определённое состояние. В такой модели состояние точки пространства-времени уже не меняется, и весь процесс записан как набор состояний всех точек.

Классическим примером такого расширения может служить график движения некоторого материального объекта, нарисованный в осях пространства (пройденный путь x) и времени t . Плоскость графика интерпретируется как пространство-время процесса. Событие в точке (t, x) фиксирует наличие объекта в данной точке пути x в данный момент времени t , если график проходит через эту точку, или отсутствие объекта в этих координатах, если график проходит вне этой точки. Область зависимости нового элемента (точки пространства-времени) расположена в прошлом по оси времени. При этом для механического движения состояние точки можно описать, зная состояния точек в сколь угодно малой окрестности этой точки. Поэтому у точки имеется бесконечно много разных областей зависимости. Эти области удовлетворяют условию транзитивности в том смысле, что произвольную область зависимости данной точки можно расширить, объединив её с областью зависимости любой входящей в неё точки. Это требование легло в основу общего понятия индукторного пространства. Оно значительно слабее классической аксиоматики топологии, и, соответственно, класс таких пространств шире класса классических топологий. Общее строгое определение индукторного пространства не связано с каким либо определённым реальным процессом, а задаётся набором аксиом.

Определение 1. Отношением индукции I на множестве T называется множество элементов вида $(x, v) \sim I$, $x \in T$, $v \subset T$, I — обозначение конкретного отношения. Разные отношения индукции отличаются как носителем T так и составом элементов индукции $(\cdot, \cdot) \sim I$. Подмножество v называется *индуктором* точки x и элемента индукции; точка x называется *центром индуктора* v и элемента индукции. Индуктор может иметь более одного центра, а точка иметь более одного индуктора. Возможны точки без индукторов. Множество индукторов точки x в отношении индукции I обозначим $I(x) = \{V \mid (x, V) \sim I\}$.

Отношение индукции образует *индукторное пространство* $[T, I]$ и называется *индукцией* на T , если оно удовлетворяет следующим аксиомам.

1. Аксиома принадлежности точки своему индуктору: $(x, v) \sim I \Rightarrow x \in v$.

2. Аксиома транзитивного объединения: если центр одного элемента индукции принадлежит индуктору другого элемента индукции, то объединение индукторов этих элементов является индуктором центра второго элемента индукции.

$$(x, v) \sim I, (y, w) \sim I, y \in v \Rightarrow (x, v \cup w) \sim I.$$

Полным индуктором $\varphi\{x\}$ точки x называется объединение всех индукторов этой точки. По определению он включается в число индукторов точки.

Утверждение 1. Из любого отношения индукции I на T можно породить индукторное пространство $[T, B]$ оператором $space(I) = B$, который определен как индуктивный предел следующих рекуррентных преобразований.

Первый шаг:

$$B =_{def} \{(x, v \cup \{x\}) \sim B \mid (x, v) \sim I\};$$

Далее, рекуррентно:

$$B =_{rec} \{(x, v \cup w) \sim B \mid (x, v) \sim B, (y, w) \sim B, y \in v\}.$$

Заметим, что на каждом шаге, начиная со второго, сохраняются все индукторы, построенные на предыдущем шаге. Это видно из формулы

$$y = x, w = v \Rightarrow (y, w) \sim B, y \in v, (x, v) \sim B \Rightarrow (x, v \cup w) \sim B,$$

Заключительный шаг: (после бесконечной рекуррентной итерации)

$$B =_{rec} B \cup \{(x, (\cup v \mid (x, v) \sim B)) \sim B \mid x \in T\} = B \cup \{(x, \varphi(x)) \sim B \mid x \in T\}.$$

На этом шаге гарантировано каждая точка получает полный индуктор.

Утверждение 2. Любой ориентированный граф может быть описан как индукторное пространство, где порождающим отношением индукции является сопоставление вершине графа (как точке) в качестве индуктора 1-окрестность по входящим рёбрам.

Утверждение 3. Любое топологическое пространство может быть описано как индукторное пространство, если в качестве индукторов точки рассмотреть открытые множества, которые её содержат. Кроме того, топологии можно сопоставить индукцию, в которой индукторами точки будут только связные открытые множества, содержащие эту точку. В обоих случаях можно добавлять к индукторам их границу, если этого требует конструкция модели.

Определение 2. Коническим индукторным пространством $Rc[n, 1]$ называется индукторное пространство $[\mathbb{R}^{n+1}, I]$, в котором:

1. носителем является линейное пространство \mathbb{R}^{n+1} ;

2. имеется базис $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$, в котором полный индуктор любой точки (x_0, \dots, x_n) имеет вид конуса

$$\varphi\{(x_0, \dots, x_n)\} = \{(y_0, \dots, y_n) \mid y_0 \leq x_0, (y_0 - x_0)^2 - (y_1 - x_1)^2 - \dots - (y_n - x_n)^2 \geq 0\};$$

3. группа автоморфизмов отношения индукции $[x, \varphi\{x\}] \sim I_0$ совпадает с группой автоморфизмов отношения индукции I .

Если индукторы такого пространства являются открытыми множествами по Евклиду, или их замыканиями (возможно частичными), и каждый индуктор точки содержит пересечение некоторого шара, с центром в этой точке, и конуса её полного индуктора, то назовём такое индукторное пространство *стандартным* коническим. \square

Заметим, что на элементы индукции, отличные от полных индукторов, в определении накладывается достаточно свободное ограничение. Системы индукторов могут существенно отличаться в разных конических пространствах (соответствующие им отношения индукции будут не изоморфны). Поэтому, даже при фиксированной размерности, определение выделяет нетривиальный класс пространств. Размерность пространства определяется как $\dim Rc[n,1] = n + 1$.

Условие $y_0 \leq x_0$ интерпретируется как условие направления причинности по времени $t = x_0$ из прошлого в будущее. Полный индуктор обеспечивает влияние на состояние точки только из прошлого для любого процесса, согласованного по областям влияния с конической индукцией. Кроме такой индукции можно задать коническую индукцию с обратным направлением времени, задав условие $y_0 \geq x_0$, или задав биконическую индукцию $Rb[n,1]$, убрав ограничение на y_0 . В последнем случае мы допускаем обратимость времени в моделях процесса.

Теорема 1. Если размерность $n+1 \geq 3$, то группа автоморфизмов отношения конической индукции $Rc[n,1]$ совпадает с аффинной подгруппой группы Пуанкаре (преобразования Лоренца, дилатации и сдвиги в указанных координатах) [3.1]. Если зафиксировать единичный вектор по оси x_0 , то исчезают дилатации. Тогда единственной инвариантной квадратичной метрикой такой группы является метрика Минковского.

Замечание 1. Для биконической индукции $Rb[n,1]$ при размерности $\dim Rb[n,1] \geq 3$ группа автоморфизмов содержит еще подгруппу второго порядка, которая действует как изменение знака времени. Для инвариантности метрики Минковского при этом не требуется дополнительно фиксировать направление времени, поскольку эта метрика инвариантна относительно такого преобразования.

Этих данных достаточно для понимания данной статьи, а их подробное изложение дано в указанной литературе.

Статья разбита на три части, соответствующие разным задачам математической физики. Решение каждой из них не использует материалы из других задач. Поэтому в каждой части используется независимая нумерация формул и теорем. Список литературы имеет двойную нумерацию с указанием номера части статьи. Нумерация рисунков сквозная. Общий для всех частей аппарат транзитивного отношения индукции (индукторных пространств) в необходимом объеме изложен во введении.

Часть 1. Точные топологические условия существования полного набора инвариантов процесса и принципа наименьшего действия.

Процесс характеризуется пространством носителем и законом, который связывает попарно состояния как совместимые в одной реализации.

Понятие обобщенной траектории процесса или подмножества совместимых состояний. Это множество всех состояний, которые могут встретиться в одной реализации процесса. Точнее, вместе с каждым состоянием оно содержит все состояния, которые могут встретиться вместе с ним в одной реализации процесса в соответствие с законом совместимости.

Обозначения и определения.

$F(x, y)$ — отношение парной совместимости состояний процесса. Это действительная функция двух переменных на пространстве всех состояний процесса.

$F(x, y) = 0$ — означает, что состояния x, y совместимы в одной реализации.

Свойства, обязательные для отношения парной совместимости.

Рефлексивность: $F(x, x) = 0$.

Коммутативность: $F(x, y) = F(y, x)$.

Свойства, возможные для отношения парной совместимости.

Транзитивность: $F(x, y) = F(y, z) = 0 \Rightarrow F(x, z) = 0$.

Инвариант процесса — это функция от состояния процесса, которая принимает одно значение на каждой из обобщенных траекторий (далее — траектории).

Полный инвариант процесса — это инвариант, который принимает разные значения на разных траекториях.

Принцип наименьшего действия.

Скажем, что процесс удовлетворяет принципу наименьшего действия, если его можно описать следующей конструкцией. Обозначим множество всех состояний T . На множестве состояний задано индукторное пространство $[T, I]$ с индукцией I , причём $\varphi(x) = T$ для любого состояния $x \in T$. Класс подмножеств, которые являются траекториями процесса, обозначим C_F . Каждая траектория может быть определена как $P(x) = \{y \mid F(x, y) = 0\}$. Точка $x \in T$ называется опорным состоянием этой траектории. Возможно совпадение траекторий для разных опорных состояний. Кроме того, имеется более широкий класс подмножеств C_p , который назовём классом гипотетических траекторий, $C_F \subset C_p$ — обязательное условие. Обозначим $C(x) = \{P \mid P \in C_p, x \in P\}$.

Назовём действием функционал типа $U: I \times C_p \rightarrow \mathbb{R}$, определённый на кортежах $\langle x, v, P \rangle$, где $x \in T$, $v \subset T$, $(x, v) \sim I$, $P \in C(x)$ и сопоставляющий каждому кортежу некоторое число, для которого верны следующие утверждения.

1d. $U(x, v, P) = u(x, v \cap P)$ (значение зависит только от части траектории в индукторе).

2d. Для каждого элемента индукции $(x, v) \sim I$ при условии $v \cap P \neq v \cap P(x)$ выполнено неравенство $U(x, v, P) > U(x, v, P(x))$ (в индукторе строго минимальное значение соответствует траектории процесса).

Если функционал действия можно задать для данного процесса, то траекторию процесса с любым опорным состоянием можно определить как такую гипотетическую траекторию, на которой минимизируется действие в каждом индукторе, который она пересекает. В этом случае скажем, что процесс удовлетворяет принципу наименьшего действия.

Пояснение. Термин «действие» и принцип наименьшего действия был введён в механике. В качестве функционала действия используется интеграл от лагранжиана по траектории во времени. В качестве гипотетических траекторий при этом рассматриваются все гладкие кривые в фазовом пространстве-времени T механической системы. А индукция сопоставляет каждой точке пространства T индукторы, состоящие из всех состояний, попадающих в заданный интервал времени вокруг данной точки. Это позволяет искать локальный минимум действия средствами вариационного исчисления. Предложенный выше формализм позволяет обобщить принцип на все процессы, которые корректно описаны траекториями в пространстве состояний и, возможно, во времени. Требование локального минимума заменено требованием глобального минимума на траектории для упрощения конструкции и без потери общности теорем.

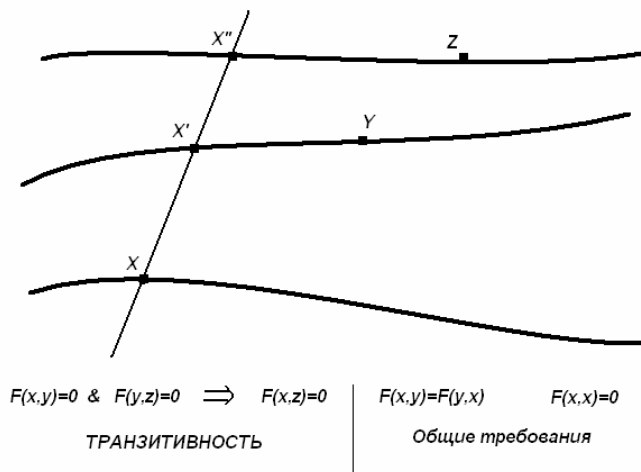


Рис. 1. Если траектории образуют расслоение в фазовом пространстве, то точки пересечения секущей со всеми слоями задают полный инвариант траектории процесса. Для фазовой точки Y значение инварианта — X' , а для точки Z инвариант равен X'' .

Теорема 1. Процесс имеет полный инвариант, если и только если отношение парной совместимости рефлексивно, коммутативно и транзитивно.

Доказательство. Указанный набор свойств означает, что множества совместимых состояний не пересекаются попарно. На множестве всех состояний они образуют разбиение. Для каждого разбиения существует функция, определенная на точках пространства состояний, которая постоянна на элементах разбиения и различна на точках из разных элементов разбиения. Например, можно в каждом элементе разбиения выбрать одну точку и получить, таким образом, множество выделенных точек. Тогда значением инварианта в произвольной точке будет та единственная выделенная точка, которая с ним совместима. По построению это — полный инвариант. (См. рисунок 1.) Если две траектории пересекаются, то любой инвариант траектории принимает на каждой из этих траекторий то значение, которое он имеет в точке их пересечения. Поэтому он не может различать эти траектории. (См. рисунок 2.) Значит, полный инвариант в таком процессе невозможен. □

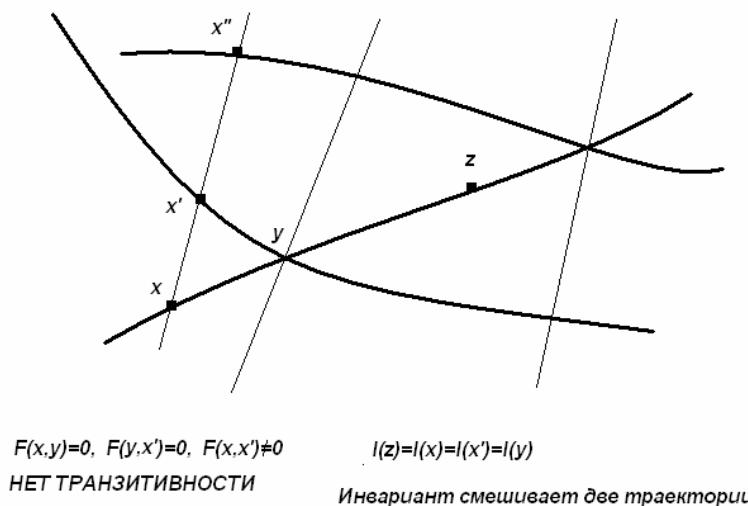


Рис. 2. Траектории пересекаются, и любой инвариант будет иметь одинаковые значения в точках x, x', x'', y, z , которые лежат на разных траекториях.

Теорема 2. Если процесс имеет полный инвариант, и только тогда, процесс удовлетворяет принципу наименьшего действия.

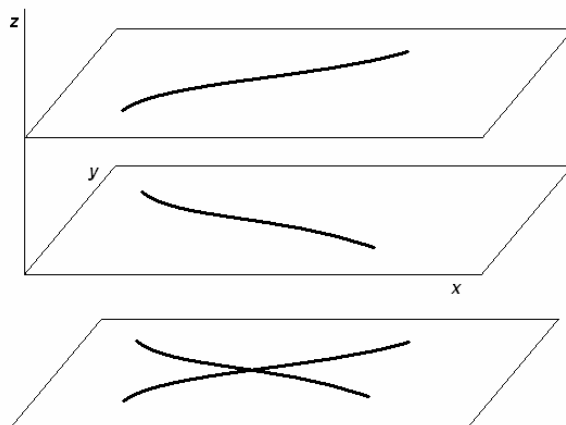
Доказательство. Класс гипотетических траекторий C_p может быть определён для любого процесса, например, как $C_p = C_F$. Аналогично, всегда можно задать индукцию, например, вида $(x, T) \sim I$ для всех $x \in T$. (Заметим, что возможны и более широкое множество гипотетических траекторий и более сложная индукция, выбранные из содержательных прикладных соображений; доказательство не зависит от выбора этих параметров.) Пусть имеется полный инвариант процесса. Из теоремы 1 следует, что траектории образуют разбиение пространства состояний. Зададим функционал действия в форме

$$U(x, v, P) = \sup \{ F^2(x, y) \mid y \in v \cap P \} \quad (1)$$

Очевидно, что на траектории процесса этот функционал обнуляется $U(x, v, P(x)) = 0$, и это минимально возможное значение. А поскольку траектории не пересекаются, то ядро обнуляется только на траектории опорного состояния x . Для всех остальных гипотетических траекторий имеется хотя бы одна точка $y \in P$, для которой $F(x, y) \neq 0$, и следовательно, $F^2(x, y) > 0$, $U(x, v, P) > 0$.

Если же некоторые траектории пересекаются, $y \in P(x) \cap P(x')$, $P(x) \neq P(x')$, что означает отсутствие транзитивности отношения совместимости, то функционал, имеющий тип действия, не выделяет одной траектории, хотя и минимизируется на траектории. Действительно, в точке пересечения действие должно дать минимум на обеих траекториях. $U(y, v, P(x)) = U(y, v, P(x')) = \min$, что нарушает условие 2d для обеих траекторий. Это доказывает необходимость транзитивности отношения совместимости (а по теореме 1 — наличия полного инварианта траектории) для реализации принципа наименьшего действия. □

Замечание 1. Если модель процесса не обеспечивает транзитивности отношения парной совместимости фазовых точек, то ситуацию можно исправить путём введения дополнительной координаты в фазовом пространстве. При этом всем точкам одной траектории приписывается одно значение этой дополнительной координаты, а на разных пересекающихся траекториях это значение выбирается различным. В таком фазовом пространстве траектории уже не пересекаются, а значение по дополнительной координате является компонентой полного инварианта. (См. рисунок 3.) Этот метод в теоретической физике интерпретируется как введение специальных зарядов для моделируемых объектов. В частности, так введены барионный заряд и система кварковых зарядов в теории элементарных частиц. Обычно, дополнительно предполагается аддитивность этого заряда по совокупности частиц, участвующих в процессе. Это не вносит противоречия, поскольку физические процессы с разным составом частиц не имеют общих траекторий в пространстве состояний.



Расширение фазового пространства

Рис. 3. Введение дополнительной координаты z разводит пересекающиеся траектории.

Рассмотрим случай, когда пространство состояний линейное размерности n , а отношение совместимости гладкое. Тогда любой гладкий k -мерный инвариант траектории удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^i} G_j(x) = a(x) \frac{\partial}{\partial x^i} F(x, y)|_{y=x}; \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, k.$$

для некоторой гладкой функции $a(x)$. Это означает, что градиент инварианта коллинеарен градиенту отношения совместимости, и на траектории его полный дифференциал равен нулю. Другая форма записи этого уравнения через скалярное произведение

$$\frac{\partial}{\partial x^i} G_j(x) * \frac{\partial}{\partial x^i} F(x, y)|_{y=x} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x^i} G_j(x)\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} F(x, y)|_{y=x}\right)^2} \quad (3)$$

Для механических систем, которые описываются сохранением функции Лагранжа L от координат $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, имеющей однопараметрическую группу инвариантности g^s , инварианты можно строить по теореме Э. Нётер (1918) [1.1][1.2].

$$I = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{ds} g^s(q_i) \right) \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Такие инварианты не всегда образуют полную систему. Предложенный выше метод позволяет пополнить систему инвариантов. Кроме того, можно вводить описание процессов самой разнообразной природы, включая информационные, биологические или экономические, через законы сохранения специально выбранных параметров.

Часть 2. Уравнение диффузии с учетом свободного пробега частиц

Исследуется вопрос о построении релятивистки согласованного уравнения теплопроводности и диффузии. Проблема связана с тем, что классическое уравнение термодинамики противоречит некоторым принципам теории относительности. Рассмотрим классическое уравнение диффузии, одномерный случай.

$$\frac{\partial}{\partial t} u \Big|_{t,x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial}{\partial x} u \right) \Big|_{t,x} \quad (1)$$

В этом уравнении предельная скорость диффузии (перемещения частиц) неограниченна (бесконечна). Это следует из того, что функция Грина уравнения (1) положительна на всей прямой при любом положительном значении параметра времени. Так, в однородном случае $u_t = au_{xx}$ при $A(t, x) = a = const$ функция Грина имеет форму (см. например [2.1-4])

$$G(t, x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ \frac{-x^2}{2a^2 t} \right\}.$$

Для преодоления этого свойства попробуем учесть реальные интервалы свободного пробега частиц в пространстве и времени. Для этого введём в непрерывное пространство-время граф, соответствующий сети для явной разностной схемы уравнения диффузии. Шаг по пространству будет соответствовать длине свободного пробега, а шаг по времени — времени свободного пробега. Такую сеть проведём через каждую точку пространства $\langle t, x \rangle$. Рёбра имеют вид $((t, x), (t + \tau, x \pm \lambda))$. Если у двух сетей есть одна общая точка, то

они совпадают полностью. Поэтому на пространстве возникает кроме топологии Эвклида ещё и индукция по графу сети. Этот граф будем считать ориентированным таким образом, что каждое ребро направлено в сторону роста координаты времени.

Этот граф распадается на континуум связанных компонент, которые не соединяются рёбрами. На каждом из этих графов может происходить свой процесс, определённый как решение явной разностной схемы. Гладкость объединённого процесса на всём непрерывном пространстве в этом случае обеспечивается только гладкостью начальных данных и граничных условий.

Но есть возможность построить дифференциальное уравнение, порождённое этой разностной схемой с заданными конечными шагами по времени и пространству. При этом для описания процесса будет использована как разностная схема, так и непрерывное дифференцирование функций на пространстве $\langle t, x \rangle$. (См. рисунок 4.) Оказывается, при учёте второго члена разложения приращений в ряде Тейлора возникает новое уравнение диффузии, содержащее волновую компоненту.

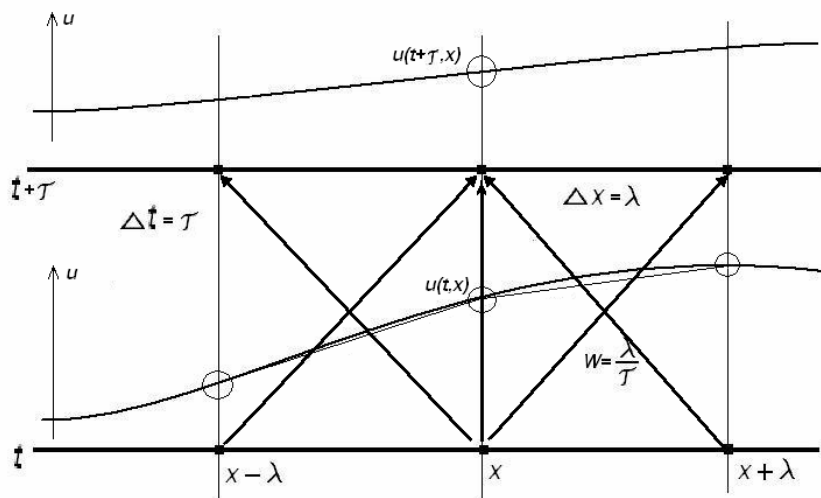


Рис. 4. Сетевая индукция на непрерывной плоскости. Показаны ребра графа и две смежные гладкие кривые концентрации диффузии с хордами конечных разностей.

Учтем интервал свободного пробега частицы в среднем:

$$\Delta x = \lambda; \quad \Delta t = \tau; \tag{2}$$

$$2\lambda \frac{u(t+\tau, x) - u(t, x)}{\tau} = A(t, x+\lambda) \left. \frac{\partial}{\partial x} u \right|_{t, x+\lambda} - A(t, x-\lambda) \left. \frac{\partial}{\partial x} u \right|_{t, x-\lambda} \tag{3}$$

Если решение и коэффициент диффузии имеют три непрерывные производные, то

$$u(t+\tau, x) - u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) \tau^2 + O(\tau^3) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} & A(t, x+\lambda) \left. \frac{\partial}{\partial x} u \right|_{t, x+\lambda} - A(t, x-\lambda) \left. \frac{\partial}{\partial x} u \right|_{t, x-\lambda} = \\ & = 2\lambda \left(\left. \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial x} u + A \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \right|_{t, x} + O(\lambda^3) \end{aligned} \tag{5}$$

Предположим, что параметры λ, τ достаточно малы, чтобы пренебречь третьим порядком. Тогда из (3-5) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial x} u + A \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \Big|_{t, x} \tag{6}$$

Это уравнение диффузии с учетом конечности свободного пробега. Оно содержит волновую компоненту (вторая производная по времени и по пространству). Другая форма:

$$u_t(t, x) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(t, x) = A_x(t, x) u_x + A(t, x) u_{xx}(t, x) \quad (7)$$

Для однородного коэффициента диффузии $A(t, x) = a = const$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \Big|_{t,x} \quad (8)$$

Параметр $\frac{\lambda}{\tau} = w$ можно рассматривать как условную скорость свободного пробега.

(Она не является среднестатистической, поскольку отношение средних величин не совпадает со средним отношением этих величин.) Фактически, он исключается и остаётся только время свободного пробега. Уравнение диффузии (6) можно записать в форме

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial x} u + A \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \Big|_{t,x} - \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \quad (9)$$

Поэтому однородное уравнение (8) эквивалентно

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \frac{2}{\tau} \left(a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \Big|_{t,x} - \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right) \quad (10)$$

В компактной форме

$$\tau u_{tt} = 2(A_x u_x + A u_{xx} - u_t) \quad (9a)$$

$$\tau u_{tt} = 2(a u_{xx} - u_t) \quad (10a)$$

Для анализа удобна другая форма однородного уравнения:

$$u_{tt} + \frac{2u_t}{\tau} = \frac{2a}{\tau} u_{xx} \quad (11)$$

Из (11) видно, что при неограниченном росте времени свободного пробега частиц и одновременном росте коэффициента диффузии по закону $a = \tau b / 2$, уравнение приближается к волновому

$$u_{tt} = b u_{xx} \quad (12)$$

При убывании времени свободного пробега до нуля с сохранением коэффициента диффузии уравнение (10a) сходится к классической диффузии

$$u_t = a u_{xx} \quad (13)$$

Рассмотрим вопрос о возможности получения релятивистской инвариантности уравнения (11). Для этого надо получить связь среднего времени свободного пробега и коэффициента диффузии так, чтобы в однородном случае результирующий коэффициент при операторе Лапласа был инвариантен относительно преобразований Лоренца. Обозначим $2a / \tau = b$, или

$$a = \tau b / 2. \quad (14)$$

В этом случае уравнение (11) приобретает форму

$$u_{tt} - b u_{xx} + \frac{2}{\tau} u_t = 0 \quad (15)$$

Рассмотрим диффузию в штрихованной системе отсчёта, которая движется относительно исходной системы наблюдателя со скоростью v . Обозначим $\beta = v / c$. Преобразования Лоренца дают такие соотношения:

$$(u_t)' = u_t \sqrt{1 - \beta^2};$$

$$(\lambda')^2 = \lambda^2 (1 - \beta^2);$$

$$\tau' = \tau(1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (16)$$

Наблюдаемая условная скорость пробега частицы

$$w' = \lambda' / \tau' = w(1 - \beta^2) \quad (17)$$

Заметим, что среднестатистическая скорость пробега частиц относительно центра масс среды, меняется по другой формуле, которая определяется усреднением релятивистского закона сложения скоростей отдельных частиц и скорости системы отсчёта.

Из уравнений (16) и (14) получаем

$$a' = \frac{a}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (18)$$

Но тогда не инвариантен коэффициент при u_t . Таким образом, можно обеспечить инвариантность только волновой части уравнения, предположив изменение (18) наблюдаемого коэффициента диффузии. Само по себе уравнение (18) плохо согласовано с теорией размерности, поскольку $[a] = [L]^2 [T]^{-1}$, и ожидаемое преобразование

$$a' = a(1 - \beta^2)^{3/2}. \quad (19)$$

Видимо, требование инвариантности уравнения диффузии в СТО не выполнимо. Но тогда можно потребовать релятивистской согласованности этого уравнения с постулатами СТО. Это означает, что распространение диффузии идёт с субсветовыми скоростями во всех системах отсчёта.

Для условной и средней скорости свободного пробега это условие выполнено в силу уравнения (17) и закона сложения скоростей в СТО соответственно. Если в неподвижной системе отсчёта $w < c$, то это сохранится и в подвижной системе.

Коэффициенты как волновой, так и диффузионной составляющей уравнения (15) в подвижной системе отсчёта меньше, чем в неподвижной системе. Это видно из преобразований (16) и (19). Поэтому, если максимальная скорость фронта диффузии ограничена скоростью света в неподвижной системе отсчёта, то это ограничение сохранится и в подвижной системе. Скорость фронта диффузии определяется ростом во времени пространственного носителя функции Грина, которая выражает распространение диффузии из такого начального состояния, в котором вся диффундирующая субстанция сосредоточена в одной точке.

Уравнение (15) — это уравнение волны с трением гиперболического типа. Область распространения функции Грина такого уравнения определяется конусом, ограниченным поверхностью характеристик. В соответствие с общей теорией [5] для уравнения в плоскости $\langle t, x \rangle$ вида

$$Au_{tt} + Cu_{tx} + Bu_{xx} = F(t, x, u, u_t, u_x)$$

характеристики определяются решением уравнения

$$A dx^2 - C dt dx + B dt^2 = 0.$$

Уравнение характеристик для уравнения (15)

$$dx^2 - b dt^2 = 0 \quad (20)$$

Это уравнение поверхности конуса, определённого неравенством

$$dx^2 - b dt^2 \geq 0$$

Замечание 1. Обнуление функции Грина вне конуса характеристик следует из того, что для гиперболического уравнения в частных производных выполнено условие единственности решения граничной задачи Коши, а нулевое решение удовлетворяет нулевым исходным данным. Во все точки вне конуса с вершиной в точке, относительно которой задана функция Грина, входят характеристики только от точек с нулевыми начальными данными.

Как показано выше, для согласованности с СТО необходимо и достаточно выполнение условия $b \leq c^2$, где c — скорость света. Из определения (14) это условие можно выразить через физические параметры процесса

$$b = 2a/\tau \leq c^2 \quad (21)$$

Теорема 1. Чтобы уравнение диффузии с учётом свободного пробега частиц было согласовано с релятивизмом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$0 \leq a \leq c^2\tau/2 \quad (22)$$

(доказано выше).

Из этой теоремы следует, в частности, что при сокращении времени свободного пробега уменьшается и диапазон допустимых значений коэффициента диффузии в системе отсчёта среды диффузии (коэффициент диффузии покоя).

Теорема 2. Если среда диффузии находится в системе отсчёта, которая движется относительно наблюдателя с равномерной скоростью v , то диапазон допустимых наблюдаемых значений коэффициента диффузии определяется формулой

$$0 \leq a' \leq c^2\tau(1-\beta^2)^{3/2}/2 \quad (23)$$

Это следует из формулы преобразования (19) и из принципа относительности, в соответствии с которым наблюдаемая диффузия в системе отсчёта среды диффузии должна удовлетворять диапазону (22), не зависимо от того, с какой скоростью движется эта среда относительно наблюдателя.

Замечание 2. Наблюдаемое время свободного пробега в подвижной среде возрастает по формуле (16), но это не влияет на оценку (23) диапазона коэффициента диффузии. Это следует из того, что формула (22) должна выполняться во всех системах отсчёта.

$$0 \leq a' \leq c^2\tau'/2 \quad (24)$$

используя уравнения (16)(19) получаем

$$0 \leq 2(1-\beta^2)^{1/2} a' \leq c^2\tau$$

$$0 \leq 2a(1-\beta^2)^2 \leq c^2\tau$$

А из принципа относительности для формул (22)(19) получаем более сильное условие, которое соответствует теореме 2:

$$0 \leq 2a'(1-\beta^2)^{-3/2} \leq c^2\tau$$

Таким образом, диапазон (23) оказывается внутри диапазона (24), а поскольку требуются оба ограничения, то оценка (24) не влияет на окончательный результат.

Замечание 3. Полученная граница возможных значений коэффициента диффузии значительно превосходит реальные значения в изучаемых процессах, что, видимо, и является причиной отсутствия в классической теории соответствующих ограничений. Например, если время свободного пробега имеет порядок микросекунды, то граница (22) в системе МКСА имеет порядок $10^{16} \cdot 10^{-6} = 10^{10} (m^2s^{-1})$. Характерные значения коэффициентов диффузии и теплопроводности имеют порядки ниже 10^3 . Оценка (23) существенно сжимает диапазон только при скоростях, близких к скорости света. Такие наблюдения начались только недавно в дальней астрономии. Возможно, для далёких объектов оценку (23) удастся проверить.

Замечание 4. Если рассмотреть в качестве модели исходное уравнение в конечных разностях (3), то становится очевидным сосредоточенность функции Грина в конусе с образующими векторами $(a\lambda, \tau)$ и $(-a\lambda, \tau)$. Такая модель соответствует замене уравнений (4)(5) на бесконечный ряд Тейлора. В этом случае уравнения (7) и (8) заменяются уравнениями бесконечного порядка, имеющими вид бесконечного ряда дифференциальных мономов. В качестве начальных данных такого уравнения надо задавать распределение концентрации $u(0, x)$ и все производные $u_{t, \dots, t}(0, x)$, $-\infty < x < \infty$;

В другом варианте можно задать начальные данные в полосе $u(t, x)$, $-\tau \leq t \leq 0$; $-\infty < x < \infty$, что позволяет решать как уравнение дифференциального ряда, так и непосредственно разностную схему. В обоих вариантах надо обеспечить достаточную гладкость задаваемых функций. Для дифференциального ряда необходимо иметь непрерывные частные производные всех порядков. Для разностной схемы формальное решение возможно из произвольных данных в полосе, но физический смысл схема имеет только при непрерывных частных производных до второго порядка.

Замечание 5. С точки зрения адекватности разностной модели её физической интерпретации — процессу диффузии — важно исследовать условие устойчивости разностной схемы (3). Если параметры свободного пробега частиц λ, τ выбраны (или измерены) так, что разностная схема неустойчива, то решение будет содержать колебания с неограниченно нарастающей во времени амплитудой в каждой точке области распространения процесса. Это означает, что в некоторых точках значения концентрации будут отрицательны: $u(x, t) < 0$, что не адекватно физической интерпретации. В таких решениях закон сохранения массы (или сохранения тепловой энергии) $\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx = m(t) = m = const$ выполняется за счет компенсации сколь угодно больших положительных значений концентрации соответственными по величине отрицательными значениями. Наличие отрицательных значений концентрации означает, что при снижении концентрации до значений, близких к нулю, уравнение реального процесса становится нелинейным, и распространение диффузии становится солитонном в этой области. Таким образом, требование устойчивости уравнения (3) означает условие правомерности линейной модели процесса диффузии или термодинамики.

Лемма 1. Уравнения (3) и (9) на классе функций из класса $C_3(\mathbb{R})$ (наличие трёх непрерывных производных) в однородном случае эквивалентно явной разностной схеме уравнения диффузии (1) с шагами по времени τ и по пространству λ и с увеличенным в два раза коэффициентом диффузии. В общем случае явная схема соответствует дифференциальному уравнению

$$\tau u_{tt} = 2A_x u_x + A u_{xx} - 2u_t \quad (C1)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3) и его решение на точках сети с шагами τ и λ . Рассмотрим разностные оценки производных по пространству:

$$u_x(t, x - \lambda) \approx \frac{u(t, x) - u(t, x - \lambda)}{\lambda}; \quad u_x(t, x + \lambda) \approx \frac{u(t, x + \lambda) - u(t, x)}{\lambda}.$$

Используя гладкость функции запишем разложение с точностью до третьего порядка:

$$u(t, x + \lambda) = u(t, x) + u_x(t, x)\lambda + u_{xx}(t, x)\lambda^2 / 2;$$

$$u(t, x - \lambda) = u(t, x) - u_x(t, x)\lambda + u_{xx}(t, x)\lambda^2 / 2;$$

$$u_x(t, x - \lambda) \approx \frac{u_x(t, x)\lambda - u_{xx}(t, x)\lambda^2 / 2}{\lambda};$$

$$u_x(t, x + \lambda) \approx \frac{u_x(t, x)\lambda + u_{xx}(t, x)\lambda^2 / 2}{\lambda};$$

Явная разностная схема уравнения (3)

$$2\lambda \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} =$$

$$= A(t, x + \lambda) \frac{u_x(t, x)\lambda + u_{xx}(t, x)\lambda^2 / 2}{\lambda} - A(t, x - \lambda) \frac{u_x(t, x)\lambda - u_{xx}(t, x)\lambda^2 / 2}{\lambda}$$

$$2\lambda^2 (u(t+\tau, x) - u(t, x)) = \tau \left((A(t, x+\lambda) - A(t, x-\lambda)) u_x(t, x) \lambda + (A(t, x+\lambda) + A(t, x-\lambda)) u_{xx}(t, x) \lambda^2 / 2 \right)$$

Сделаем разложение в ряд

$$A(t, x+\lambda) = A(t, x) + A_x(t, x)\lambda + A_{xx}(t, x)\lambda^2 / 2 + O(\lambda^3)$$

$$A(t, x-\lambda) = A(t, x) - A_x(t, x)\lambda + A_{xx}(t, x)\lambda^2 / 2 + O(\lambda^3)$$

Используя эти уравнения и разложение (4), получим

$$2\lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) \right) = 2A_x(t, x)\lambda^2 u_x(t, x) + A(t, x)\lambda^2 u_{xx}(t, x) + O(\tau\lambda^3)$$

Пренебрегая членом порядка $\tau\lambda$, получим дифференциальное уравнение (C1), которое соответствует явной разностной схеме. Записав уравнение (9а) в форме $\tau u_{tt} = 2A_x u_x + 2A u_{xx} - 2u_t$, можно видеть, что в нём отличается от (C1) только коэффициент диффузии (в два раза больше), но при этом его пространственная производная входит без соответствующего масштабирования. Поэтому в неоднородном случае уравнения (C1) и (9а) не переводятся друг в друга масштабированием коэффициента диффузии. Однако в однородном случае его производная обнуляется и явная разностная схема соответствует дифференциальному уравнению

$$\tau u_{tt} = a u_{xx} - 2u_t \quad (C2)$$

Это уравнение отличается от уравнения (10а) только уменьшением вдвое коэффициента диффузии. \square

Теорема 3. Требование устойчивости разностной схемы (3) эквивалентно дополнительному ограничению на коэффициент диффузии

$$a < 2\lambda^2 / \tau, \quad (25)$$

$$A(t, x-\lambda) + A(t, x+\lambda) < 4\lambda^2 / \tau \quad (26)$$

соответственно в однородном и в общем случае.

Доказательство. Рассмотрим однородный случай. Следуя лемме 1 можно рассмотреть схему (3) как явную разностную. Тогда можно использовать для анализа её устойчивости требование уменьшения амплитуды единичного возмущения с треугольным профилем на сети пространства-времени за один шаг схемы.

$$2\lambda \frac{u(t+\tau, x) - u(t, x)}{\tau} = a \left(\frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x+\lambda} - \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x-\lambda} \right) \quad (27)$$

$$u(t+\tau, x) = \frac{a\tau}{2\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x+\lambda} - \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{t, x-\lambda} \right) + u(t, x) \quad (28)$$

Рассмотрим в точке (t, x) единичное возмущение с треугольным профилем на ближайших λ -интервалах:

$$u(t, x') = \begin{cases} 1, & x' = x; \\ \frac{\lambda}{x' - x}, & x < x' < x + \lambda; \\ \frac{\lambda}{x - x'}, & x - \lambda < x' < x; \\ 0, & x' < x - \lambda \vee x + \lambda < x'; \end{cases} \quad (29)$$

Условие устойчивости можно сформулировать для этого начального состояния (29) с односторонними производными на краях λ -интервалов:

$$|u(t+\tau, x)| < |u(t, x)| \quad (30)$$

Уравнение (28) в этом случае даёт

$$u(t + \tau, x) = \frac{a\tau}{2\lambda} \left(-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) + 1 = -\frac{a\tau}{\lambda^2} + 1$$

Требование (30) в этом случае означает

$$-\frac{a\tau}{\lambda^2} + 1 > -1$$

Это эквивалентно уравнению (25).

Рассмотрим общий не однородный случай. Применим начальные условия (28) и требование (30) для уравнения динамики (3).

$$\frac{2\lambda}{\tau} (u(t + \tau, x) - 1) = -\frac{A(t, x + \lambda)}{\lambda} - \frac{A(t, x - \lambda)}{\lambda}$$

$$1 - \tau \frac{A(t, x + \lambda) + A(t, x - \lambda)}{2\lambda^2} > -1$$

Это эквивалентно уравнению (26). \square

Теорема 4. При совместном рассмотрении требований релятивистской согласованности и устойчивости однородного уравнения (10) границы допустимых значений коэффициента диффузии зависят от соотношения параметров свободного пробега: при $\lambda < \frac{c}{2}\tau$ требуется (25), а в противном случае требуется (22).

Это следует из того, что требуется выполнение обеих указанных верхних оценок, и достаточно потребовать выполнения более сильного неравенства. При малых значениях отношения λ/τ сильнее требование устойчивости, а при больших — требование релятивистской согласованности. \square

Часть 3. Генерация графа в метрическом пространстве и переход к топологии в макроскопическом пределе.

1. Содержательная постановка проблемы.

В современной математической физике имеется направление моделирования физических процессов на пространствах дискретной природы, когда у каждой точки можно указать одну или несколько ближайших к ней точек. Однако при попытке дать такое описание для механических процессов возникает проблема несоответствия групп симметрии в непрерывном и дискретном пространстве (например [3.8]). Для преодоления этой трудности обычно вводятся нестрогие предложения рассматривать дискретное пространство «в больших масштабах» с интуитивно ясной идеей сходства больших участков достаточно случайного графа по своим статистическим свойствам с непрерывной топологией. Однако строгих процедур такого перехода обычно не предлагается. В данной работе предлагается строгая процедура такого преобразования, эффективная в важных для приложений случаях евклидова и псевдоевклидова пространства, а также в достаточно широком классе топологий. Обычно переход от описания процессов на графах к их описанию на соответствующих непрерывных пространствах называют описанием процесса в макроскопическом пределе. Поэтому такое преобразование графа в топологию будем далее называть, следуя традиции, макропереходом (от графа к топологии). От графа будем дополнительно требовать равномерную ограниченность ранга каждой вершины.

Все интересующие нас топологии описываются метрикой, которая будет существенно использоваться в построениях. Фактически будет предложено описание этих топологий случайными графами и процедурой макроперехода.

2. Структура решения задачи.

Содержательно, идея макроперехода сводится к следующему. На пространстве задана метрика, некоторая индукция и бесконечный граф с конечным ветвлением. Предполагается наличие операции параллельного переноса рёбер графа, которая переносит конец ребра в заданную точку, а начало переносит так, что сохраняется длина ребра в смысле метрики. Строится такая процедура переноса рёбер в заданную точку, при которой начала рёбер образуют в пределе множество точек, плотное в заданном индукторе. Тогда по графу можно восстановить всю индукцию в форме замыкания полученных множеств. Прикладная интерпретация процедуры макроперехода зависит от интерпретации индукции и способа выбора перемещаемых рёбер для получения заданного элемента индукции. Это будет показано для евклидовой и конической индукции.

От генератора графа требуется следующее. Вершины графа генерируются в заданном метрическом пространстве. Требуется существование в этом пространстве транзитивной группы изометрий. Ребра графа ориентированы. Множество вершин графа в общем случае бесконечно. Число рёбер каждого типа вход/выход ограничено сверху заданным значением. У каждой вершины имеется окрестность, в которой нет ни одной другой вершины. Длину ребра определим как расстояние между связанными им вершинами без учета направления.

Множество вершин графа обозначим G , а множество ребер — A . Пространство обозначим X , и метрику в нем — $d(x, y)$, $x, y \in X$. Транзитивную группу изометрий обозначим H .

Кроме того, будем считать, что на пространстве задана индукция $[X, I]$, которая согласована с метрикой в следующем смысле. Элементы индукции будем обозначать $[x, V] \in I$, $x \in X$ — центр элемента индукции, $V \subset X$ — индуктор центра. Далее обозначим φM — полный индуктор для произвольного множества M :

$$\varphi M = \bigcup V \mid \exists x \in M [x, V] \in I;$$

Аксиомы индукторного пространства соответствуют работе [3.1].

Согласованность индукции с метрикой означает, что для произвольного подмножества пространства любая его предельная точка относительно индукции является и предельной точкой относительно метрики. В обратную сторону соответствия не требуется.

Если $V \subset X$ и $y \in \text{Lim}\{V\}_I$, то $y \in \text{Lim}\{V\}_d$.

$$V \subset X \ \& \ y \in \text{Lim}\{V\}_I \Rightarrow y \in \text{Lim}\{V\}_d \quad (2.1)$$

Требование 2.1. Группа H содержит однозначно определённую транзитивную подгруппу H_p , которая для любой пары точек $g, r \in X$ содержит ровно один оператор $h_{g,r}$, для которого $h_{g,r}g = r$, и $h_{rr} = 1$ (единичный элемент группы). Эти операторы назовём параллельными переносами из точки g в точку r , используя аналогию с соответствующим действием в аффинных пространствах. Возможность выделения такой подгруппы в теории групп Ли называется разложением группы с просто-транзитивным действием [3.7], и действие подгруппы H_p называется просто-транзитивным.

Определение 2.1. Пусть заданы вершина $r \in G$ и множество $B \subset X$, $r \in B$. *Входной концентрацией* в вершине r по базе B назовём множество точек, которые получены из исходящих вершин всех тех рёбер графа, из которых есть ребро, входящее в базу, после параллельного переноса этих рёбер их входными вершинами в вершину r . Обозначим его

$$C_{in}(r, B) = \{h_{gr}q \mid g \in B, (g, r) \in A\}.$$

Аналогично определим *выходную концентрацию* в вершине по базе:

$$C_{out}(r, B) = \{h_{gr}q \mid g \in B, (g, q) \in A\}.$$

Это совокупность точек, которые получены из входных вершин всех тех рёбер графа, у которых исходная вершина входит в базу B , после параллельного переноса этих рёбер их исходными вершинами в вершину r .

Для произвольного множества $M \subset X$ обозначим $(M)_\varepsilon$ его ε -окрестность:

$$\{g \mid d(g, M) \leq \varepsilon\} = (M)_\varepsilon$$

Определение 2.2. Скажем, что у точки пространства $r \in X$ и элемента индукции $[r, V] \in I$ имеется ε -эффективное множество E , если входная концентрация в точке r по базе $(E)_\varepsilon$ даёт множество точек, всюду плотное на индукторе V и содержащееся в этом индукторе.

$$C_{in}(r, (E)_\varepsilon) = \{h_{gr} q \mid d(g, E) \leq \varepsilon, (q, g) \in A\} \sim: V \quad (2.2)$$

где отношение $M \sim: M'$ означает, что множество M является всюду плотным подмножеством множества M' в заданной метрике.

Требование 2.2. Каждая точка пространства $r \in X$ имеет ε -эффективное множество E для любого $\varepsilon > 0$ и любого своего индуктора V . Это множество может быть определено не однозначно. Совокупность всех таких множеств обозначим $E(r, V, \varepsilon)$.

Требование 2.3. Любой автоморфизм индукции переводит ε -эффективное множество каждой точки и её индуктора в некоторое ε -эффективное множество образа этой точки и образа этого индуктора.

$$p \in \text{aut}\{I\} \ \& \ E \in E(g, V, \varepsilon) \Rightarrow pE \in E(pg, hV, \varepsilon) \quad (2.4)$$

Замечание 2.1. Если граф удовлетворяет требованию 2.2, то элемент индукции $[x, V] \in I$ может быть восстановлен по графу с помощью операции концентрации

$$V = C_{in}(x, (E(x, V, \varepsilon))_\varepsilon)^* \quad (2.5)$$

где звёздочка в верхнем индексе означает замыкание множества по метрике, а параметр ипсилон принимает произвольное положительное значение.

Это позволяет рассматривать преобразование (2.5) как макропереход от графа к индукции непрерывного пространства. В прикладных задачах ипсилон-эффективные множества желательно получить в форме, имеющей содержательную интерпретацию. Это накладывает дополнительные ограничения на генератор графа, но эти ограничения носят не математический характер. В последующих разделах даются примеры содержательно интерпретируемых макропереходов в области физики.

Замечание 2.2. Если выполнены требования 2.2 и 2.3, то, независимо от группы автоморфизмов самого графа, группа автоморфизмов, сохраняющих макропереход, совпадает с группой автоморфизмов исходной индукции.

Замечание 2.3. Поскольку восстановленный индуктор возникает как замыкание всюду плотного множества, то он всегда замкнут в исходной топологии. Если индукция содержит открытые или частично замкнутые в этой топологии индукторы, то они будут восстанавливаться с точностью до замыкания. Это не влияет на те топологические свойства индукции, которые связаны с внутренними точками индукторов. Но, вообще говоря, точно восстановить макропереходом можно только такую индукцию, у которой все индукторы замкнуты в базовой топологии.

3. Требования к генератору графа в конической индукции.

В качестве пространства вложения графа рассмотрим евклидово пространство $X = \mathbb{R}^{n+1}$ с конической индукцией $I = Rc[n+1]$. Для построения графа выберем некоторую ортонормальную систему координат с осью $\langle x_0 \rangle$, параллельной осевой линии

конусов-индукторов, и с осями $\langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle$ в гиперплоскости сферического сечения конусов.

Множество вершин графа образует пуассоновское «напыление» (sprinklings) [3.8] в $X = \mathbb{R}^{n+1}$.

Это реализация случайной величины, принимающей значения в множестве дискретных размещений счётного числа точек на евклидовом пространстве X с обычным определением объёма. Вероятностное распределение этой величины определяется формулой Пуассона. Если $A \subset X$ — подмножество конечного объёма V , то вероятность наличия в нём ровно N точек из напыления равна

$$p(N|V) = \rho V^N e^{-\rho V} / N! \quad (3.1)$$

Этот закон инвариантен относительно любого преобразования пространства, которое сохраняет евклидов объём измеримых по Лебегу подмножеств. Однако, реализация этой случайной величины (напыление) не инвариантно относительно большинства таких преобразований. Важными подгруппами инвариантности (3.1) являются группы аффинных сдвигов и поворотов, группа псевдоповоротов Лоренца (при любом задании выделенной оси), унитарная линейная группа. Перечисленные подгруппы имеют пересечения.

С вероятностью 1 в таком напылении у каждой его точки в любой евклидовой компактной окрестности содержится только конечное число точек напыления. В указанной работе [3.8] показано, что любой лоренц-инвариантный оператор (системно независимый), который сопоставляет детерминировано каждому напылению некоторый граф с вершинами конечного ранга, является неизмеримой функцией на сигма-алгебре событий, где задана мера (3.1). Однако, если отказаться от системной независимости оператора, то построение графа на точках напыления возможно. При этом, в разных системах отсчёта оператор будет иметь различные определения. Это означает, что такой оператор выделяет одну систему отсчёта, в которой он имеет каноническое определение. Дальнейшие построения будут вестись в предположении, что описание построения графа ведётся в некоторой заданной системе отсчёта, в которой будет описана и порождающая система элементов конической индукции, определяющей псевдометрику.

Заметим, что выбор этой системы произволен, и порождённая индукция не зависит от выбора этой системы. Однако от системы отсчёта зависит описание оператора построения графа. Такие конструкции часто встречаются в физике. Например, описание движения планет выглядит проще в гелиоцентрической системе, хотя эквивалентные движения можно более сложно описать с привязкой к любому небесному телу. Это не нарушает принципа относительности и равноправия систем отсчёта. Такие операторы назовём системно зависимыми. Формализация этих рассуждений требует введения обозначений. Обозначим через F систему отсчёта в пространстве Минковского, L — произвольное преобразование Лоренца, преобразующее систему отсчёта, η — реализацию пуассоновского напыления в этом пространстве, γ — оператор построения графа, который определён на паре (напыление и система отсчёта), $\Gamma = (G; A)$ — граф с множеством вершин G и множеством рёбер A , $A \subset G \times G$. Тогда

$$\gamma: (\eta, F) \mapsto \Gamma, \quad (3.2)$$

$$\Gamma = (\eta; A)$$

Формула (3.2) описывает тип оператора, а его левое действие будем обозначать кружком: $\gamma \circ (\eta, F) = (\eta; A)$.

Свойство системной независимости генератора выражается любым из двух эквивалентных равенств:

$$\gamma \circ (L\eta, F) = L(\gamma \circ (\eta, F)) \quad (3.3)$$

$$\gamma \circ (\eta, LF) = L^{-1}(\gamma \circ (\eta, F)) \quad (3.3a)$$

Свойство системной зависимости выражается другим равенством:

$$\gamma \circ (L\eta, LF) = L(\gamma \circ (\eta, F)) \quad (3.4)$$

По сказанному выше, генератор графа надо строить с требованием (3.4).

4. Построение генератора графа на напылении в пространстве Минковского.

Соглашение 4.1 Для упрощения описания генерации графа на точках напыления введём термин «автономная реализация с заданным распределением». Этот термин выделяет класс случайных величин, которые независимы в совокупности. Автономная реализация означает получение значения одной из таких величин. Разные автономные реализации соответствуют разным случайным величинам из этого класса даже при совпадении распределений вероятностей. Таким образом, указанное в реализации распределение случайной величины является как безусловным, так и условным распределением вероятности при условии ранее полученных значений других автономных реализаций.

Введём два стандартных распределения случайных величин с натуральными значениями.

$$p(i), i = 1, \dots; p(i) > 0; \sum_{i=1}^{\infty} p(i) = 1; \sum_{i=1}^{\infty} ip(i) < \infty; \quad (4.1)$$

$$q(k), k = 1, \dots, K; q(k) \geq 0; \sum_{k=1}^K q(k) = 1; \quad (4.2)$$

Пусть дана автономная реализация η напыления с распределением (3.1). Для каждой точки $x \in X$ выделим три подмножества точек напыления.

$$W(x, \eta) = \{y \mid y \in \eta, 0 < \|y - x\|_M^2\} \quad (4.3)$$

$$W_-(x, \eta) = \{y \mid y \in \eta, 0 < \|y - x\|_M^2, (y)_0 < (x)_0\} \quad (4.4)$$

$$W_+(x, \eta) = \{y \mid y \in \eta, 0 < \|y - x\|_M^2, (y)_0 > (x)_0\} \quad (4.5)$$

$$W(x, \eta) = W_-(x, \eta) \cup W_+(x, \eta); \quad W_-(x, \eta) \cap W_+(x, \eta) = \emptyset;$$

Здесь норма $\|\cdot\|_M$ псевдоевклидова, и сравниваются координаты точек по нулевой оси в обозначениях координат раздела 3. С вероятностью 1 эти множества бесконечные счетные для всех точек пространства $x \in X$. На каждом из этих множеств зададим нумерацию точек $n(y \mid x_+)$ и $n(y \mid x_-)$ в порядке возрастания евклидова расстояния от точки x .

$$\begin{aligned} y = \arg \min_y |y - x| &\Leftrightarrow n(y \mid x\alpha) = 1; \\ |y - x| > |y' - x| &\Leftrightarrow n(y \mid x\alpha) > n(y' \mid x\alpha); \\ \alpha = +, -; y, y' \in W_\alpha(x, \eta); \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для каждой точки $z \in \eta$ проводится построение входящих и исходящих рёбер. Делается автономная реализация величины $K_-(z)$ распределения $q(\cdot)$. По определению $K_-(z) \leq K$. Делается ровно $K_-(z)$ автономных реализаций распределения $p(\cdot)$: $n(1), \dots, n(K_-(z))$. Из множества $W_-(z, \eta)$ выбираются точки с этими номерами $n(y(i) \mid z_-) = n(i)$. Строятся ребра, входящие в точку z : $(y(1), z), \dots, (y(K_-(z)), z)$. На этом этапе множества и номера с индексом $+$ не используются. Построение графа завершено. В каждой вершине не более чем K входящих ребер. Число исходящих рёбер непосредственно оценить нельзя, поскольку оно равно числу вершин, в которые из данной вершины есть входящая связь.

Замечание 4.1. В силу условия (4.1) у распределения $p(\cdot)$ имеется конечное математическое ожидание, а распределение (3.1) обеспечивает с вероятностью 1 конечное

число точек в любом шаре с центром в данной точке. Поэтому с вероятностью 1 число исходящих рёбер из любой точки напыления конечно, но нет равномерного ограничения на это число по всему напылению. Для обеспечения ограничения на число исходящих рёбер, введём следующую модификацию алгоритма. Если очередному номеру $n(i)$ соответствует вершина, у которой уже есть K исходящих рёбер, то вместо этого номера берётся наименьший из следующих номер $n'(i) > n(i)$, для которого точка имеет меньшее число исходящих рёбер. В этом случае становится существенен порядок перебора точек z . При такой модификации у каждой точки не более чем K исходящих рёбер. Построение закончено.

Замечание 4.2. Двойственный алгоритм. Используя множество $W_+(z, \eta)$ можно аналогично построить граф на точках напыления, основываясь на исходящих связях.

Такие графы будем называть далее графами *конической генерации*.

5. Варианты реализации напылений.

В разделе 3 описано напыление, полученное как реализация распределения Пуассона. Оно обладает свойством системной независимости в следующем смысле. Пусть задана вероятностная мера на множестве напылений в пространстве X , которая определена следующим образом. Для любого ограниченного открытого множества U в евклидовой топологии на X задана сигма-алгебра S на множестве расположений конечного числа точек η на U , порождённая множествами

$$U(x_1, r_1; \dots; x_N, r_N), \quad N = 0, 1, \dots, \quad x_1, \dots, x_N \in U, \quad r_1, \dots, r_N \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

имеющими следующее определение. Каждое такое множество состоит из расположения ровно N точек, причем точка с номером i расположена в пересечении множества U и шара радиуса r_i с центром в точке x_i .

Мера определена как функция $P(B|U, F)$, $B \in S(U)$, F — система отсчёта в пространстве Минковского на X , согласованная с конической индукцией. Нормировка отдельная для каждой области U . Если $r = \text{diam}(U)$, $x \in U$ то

$$\sum_{N=0}^{\infty} P(U(x, r; \dots; x, r) | U, F) = 1 \quad (5.2)$$

Тогда условие системной зависимости (от системы отсчёта)

$$P(LB | LU, LF) = P(B | U, F) \quad (5.3)$$

Более сильное условие системной независимости дополнительно требует

$$P(LB | LU, F) = P(B | U, F) \quad (5.4)$$

Системная независимость означает, что вероятность любого измеримого множества напылений в любой ограниченной области имеет одинаковые значения при вычислениях во всех системах отсчёта. При системной зависимости требуется только совпадение этих вероятностей на образах одной области в разных системах отсчёта при задании системы отсчёта.

Системной независимостью обладает мера Пуассона (3.1). Она задана на сигма-алгебре, в которой учитывается только число точек N и объём области по Евклиду.

Условие системной зависимости позволяет строить значительно более широкий класс напылений, чем допускает системная независимость. Среди этих напылений имеются такие, реализация которых с вероятностью 1 допускает применение схемы макроперехода. Для определения системно зависимого напыления достаточно определить его в некоторой фиксированной системе отсчёта и постулировать формулу (5.3).

Пример 5.1. Зафиксируем систему отсчёта F_0 . В этой системе построим координатную сетку с шагом ε по каждой из осей $\langle x_0 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle$. Клетки этой сетки будем координировать вершиной с минимальными координатами по всем осям. В каждой клетке

поместим ровно одну точку напыления, которая получается как автономная реализация равномерного распределения вероятностей по этой клетке. Мера $P(B|U, F)$ вычисляется путем наложения клеточного разбиения на область U и вычисления соответствующих вероятностей попадания точек в область с учётом независимости реализаций в разных клетках по соглашению 4.1. В этом примере расстояния между ближайшими точками не превосходят двух диаметров клетки $2\varepsilon\sqrt{(n+1)}$. И у каждой точки с вероятностью 1 имеется евклидова окрестность, в которой нет других точек.

Это напыление определено как системно зависимое и не является системно независимым, поскольку при смене системы отсчёта с заменой координатных осей преобразованием Лоренца сеть перестанет быть координатной, а при действии преобразования Лоренца на сеть в исходной системе координат клетки перестают быть .кубическими и координатными. Только действие преобразования и на сеть, и на координатные оси сохраняет инвариантность определения меры.

Пример 5.2. Предыдущий пример можно многовариантно модифицировать, задавая разные покрытия пространства областями равномерно ограниченного сверху диаметра и ограниченного снизу объёма. При этом не требуется выдерживать в этом покрытии какую-либо симметрию. Области покрытия могут иметь перекрытия конечной кратности.

6. Построение макроскопического перехода.

За основу построения можно взять любое напыление, описанное в разделе 5, и построенный по нему граф, генератор которого описан в разделе 4. Для определения макроперехода надо указать ε -эффективное множество E для любой точки пространства. В конической индукции полные индукторы точек образуют структуру, изоморфную системе световых конусов в прошлое в пространстве Минковского той же размерности [3.9][3.10-12].

Следуя терминологии теории относительности, назовём времяподобной линией в пространстве X гладкую линию, проходящую внутри полного индуктора любой своей точки. Времяподобную линию, точки которой имеют неограниченную снизу нулевую координату, назовём бесконечной в прошлое.

Теорема 6.1. Произвольная времяподобная бесконечная в прошлое линия является ε -эффективным множеством E для полного индуктора любой своей точки при положительном ипсилон.

Доказательство.

Лемма 6.1. При любом положительном значении ипсилон с вероятностью 1 в ε -трубку вокруг времяподобной линии попадает бесконечно много точек напыления. Это следует из того, что в любом положительном объеме есть ограниченная снизу вероятность появления в нём точки напыления. Поскольку ε -трубку можно разбить на бесконечное число секций, имеющих объём не менее заданного значения, то с вероятностью 1 в бесконечном числе секций будет содержаться точка напыления. \square

Лемма 6.2. Параллельный перенос всех рёбер, входящих в точки напыления, содержащихся в ε -трубке времяподобной линии T , в любую точку $x \in T$ этой линии даёт всюду плотное множество Q , состоящее из концевых исходящих точек этих рёбер, в конусе $\varphi\{x\}$ полного индуктора этой точки x .

Доказательство леммы. Для каждой точки y напыления из ε -трубки, для любой точки $z \in \varphi(y)$ и для любого $\delta > 0$, имеется положительная вероятность наличия ребра (z', y) , где z' принадлежит δ -окрестности точки z , $z' \in (\{z\})_\delta$ в обозначениях раздела 2. И эта вероятность зависит только от параметров δ и $D = (z - y)$. Поэтому с вероятностью 1 найдётся точка напыления в ε -трубке, где такое ребро есть. В силу произвольности

параметров δ и $D = (z - y)$ после параллельного переноса всех таких рёбер в точку x будет точка исходящего конца ребра в любой δ -окрестности любой точки $x - D$ полного индуктора $\varphi\{x\}$. \square

Доказательство теоремы следует из леммы 6.2 и определения ε -эффективного множества. Теорема доказана.

Следствие. Макропереход по графу конической генерации порождает систему полных индукторов конической индукции. Как показано в [3.1], при размерности пространства $n + 1 \geq 3$ группа автоморфизмов такой индукции совпадает с аффинной подгруппой группы Пуанкаре (преобразования Лоренца, дилатации и сдвиги).

Теорема 6.2. Если индукция задана в конечномерном евклидовом пространстве, и индуктор точки содержит открытое множество, а напыление нигде не плотное, то любое ε -эффективное множество этого индуктора некомпактно и его ε -окрестность имеет бесконечный объём.

Доказательство. В любом множестве конечного объёма содержится только конечное число точек напыления. Поэтому входящие связи этих точек при параллельном переносе в центр индукции дают конечное число точек в индукторе, которое не может быть плотным подмножеством ни в каком открытом множестве. У каждого компактного подмножества в евклидовом пространстве ε -окрестность имеет конечный объём. Поэтому ε -эффективное подмножество указанного в условии индуктора должно быть некомпактным. \square

Следствие. Невозможно построить ε -эффективные подмножества для компактных индукторов конической индукции. Каждый такой индуктор содержит конус конечной высоты и попадает под условие теоремы. Но в любой области бесконечного объёма содержатся точки напыления с входящими рёбрами сколь угодно большой длины. Поэтому их параллельный перенос в вершину конуса даст множество концов, выходящих за пределы индуктора. Таким образом, макропереход может определить только индукцию с неограниченными конусами, которая рассматривается в [3.2, 3.4] и [3.8-12].

Замечание 6.1. Если сделать двойственный макропереход, используя исходящие рёбра по замечанию 4.2, то получится двойственная индукция с конусами индукторов, ось которых направлена по оси $\langle x_0 \rangle$ в сторону $+\infty$. При этом не меняются напыление и граф. Используя эти два макроперехода, можно построить множества Александра и получить с помощью операций пересечения и объединения этих множеств любую стандартную коническую индукцию. (См. определение 2 во введении к статье, а также замечание 2.3.)

Доказательство. Обозначим $\varphi_-(x)$ и $\varphi_+(x)$ полные индукторы точки x , восстановленные по входящим и исходящим рёбрам. Тогда любое множество Александра выражается в форме

$$A(x, y) = \varphi_-(x) \cap \varphi_+(x) \quad (6.1)$$

Эту формулу можно считать математическим определением множества Александра, которое выражает причинно-следственный интервал между точками x и y в пространстве Минковского, при условии, что первая точка следует за второй в частичной упорядоченности световых конусов. В противном случае это множество пустое.

Множества Александра имеют конечный объём по Евклиду. Они могут быть включены в коническую индукцию как индукторы той своей вершины, у которой больше значение координаты x_0 , поскольку любая биекция, сохраняющая систему полных конусов, сохраняет и множества Александра.

Кроме того, верно и обратное: биекция, относительно которой инвариантен класс всех множеств Александра, сохраняет и полные конусы, поскольку каждый конус может быть получен, как объединение всех Александровских индукторов своей вершины.

Если множества Александрова включить указанным способом в коническую индукцию, то они своими объединениями по аксиомам индукторного пространства [3.1, 3.3] порождают любой индуктор, удовлетворяющий определению стандартной конической индукции. □

Замечание 6.2. Обозначим $A_0(x, y)$ множество внутренних точек соответствующего множества Александрова в евклидовой топологии, и назовём его областью Александрова. Тогда вся топология Евклида порождается объединениями (возможно трансфинитными) областей Александрова. Это следует из того, что область Александрова топологически эквивалентна открытому шару. Для такого макроперехода требуется кроме замыкания плотного множества использовать извлечение множества внутренних точек из этого замыкания. В обозначениях формулы (2.5), используя обозначение $(\cdot)_0$ для оператора извлечения внутренних точек, можно записать

$$(V)_0 = (C_{in}(x, (E(x, V, \varepsilon))_\varepsilon)^*)_0 \quad (6.2)$$

7. Макропереходы с фильтрами.

Из теоремы 6.2 следует, что для построения компактных индукторов непосредственно макропереходом без дополнительных операций, требуется некоторая модификация построения концентраций по базовым множествам. Рассмотрим одну из таких модификаций.

Определение 7.1. Следуя определению 2.1, определим концентрацию с фильтром. Пусть задан некоторый класс M рёбер графа, в который каждое ребро может либо входить, либо нет. Пусть заданы вершина $r \in G$ и множество $B \subset X$, $r \in B$. *Входной концентрацией* в вершине r по базе B с фильтром M назовём множество вершин графа, которые получены параллельным переносом в вершину r всех тех вершин графа, из которых есть ребро, входящее в базу, и это ребро принадлежит классу M . Обозначим его

$$C_{in}(r, B, M) = \{h_{gr}q \mid g \in B, (g, r) \in A \cap M\}. \quad (7.1)$$

Аналогично определим *выходную концентрацию* в вершине по базе с фильтром:

$$C_{out}(r, B, M) = \{h_{gr}q \mid g \in B, (g, r) \in A \cap M\}. \quad (7.2)$$

Это совокупность вершин, полученных параллельным переносом в точку r тех вершин, в которые идут исходящие рёбра из множества B , принадлежащие классу M .

Содержательная ценность такого макроперехода будет зависеть от интерпретации класса фильтрации рёбер. Назовём *метрическим фильтром* для графов, вложенных в евклидово пространство, множество

$$M(\delta) = \{(x, y) \mid (x, y) \in A, |y - x| < \delta\}, \quad (7.3)$$

которое состоит из рёбер, евклидова длина которых меньше заданного значения. Определение этого фильтра естественно обобщается на графы, вложенные в произвольное метрическое пространство.

Теорема 7.1. Макропереход с графом конической генерации (раздел 4) и системой концентраций по метрическим фильтрам вида (7.3) с разными значениями параметра δ определяет набор индукторов, порождающий по аксиоме транзитивного объединения все индукторы любой стандартной конической индукции (с точностью до частичного замыкания, см. замечание 2.3).

Доказательство. Обозначим $B(x, r)$ замкнутый шар радиуса r с центром x в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n+1} , где задана коническая индукция. Тогда макропереход в графе конической генерации с фильтром $M(\delta)$ даст множество

$$\varphi_\delta(x) = \varphi(\{x\}) \cap B(x, \delta) \quad (7.4)$$

Если выбрать последовательность $\delta_i \downarrow 0 | i \rightarrow \infty$, то соответствующая система множеств (7.4) $\Phi = \{\varphi_{\delta}(x) | x \in X, \delta \in \{\delta_i\}\}$ образует базу, порождающую замыкание любого стандартного конического индуктора. \square

Определение 7.2. Назовём графом шаровой генерации по напылению η нижеследующее определение множества рёбер. Используем соглашение 4.1 и распределения вероятностей (4.1) и (4.2). Пусть дана автономная реализация η напыления с распределением (3.1). Зададим для каждой точки $x \in X$ нумерацию $n(y|x)$ всех точек $y \in \eta$ из напыления в порядке возрастания евклидова расстояния от точки x .

$$\begin{aligned} y = \arg \min_y |y - x| &\Leftrightarrow n(y|x) = 1; \\ |y - x| > |y' - x| &\Leftrightarrow n(y|x) > n(y'|x); \end{aligned} \quad (7.5)$$

Для каждой точки $z \in \eta$ проводится построение входящих и исходящих рёбер. Делается автономная реализация величины $K_-(z)$ распределения $q(\cdot)$. По определению $K_-(z) \leq K$. Делается ровно $K_-(z)$ автономных реализаций распределения $p(\cdot)$: $n(1), \dots, n(K_-(z))$. Из множества η выбираются точки с этими номерами $n(y(i)|z) = n(i)$. Строятся ребра, входящие в точку z : $(y(1), z), \dots, (y(K_-(z)), z)$. На этом этапе построения можно применить метод ограничения исходящих рёбер, описанный в замечании 4.1. Построение завершено.

Теорема 7.2. Макропереход с графом шаровой генерации и системой концентраций по метрическим фильтрам вида (7.3) с разными значениями параметра дельта определяет набор индукторов, порождающий всю топологию Евклида по аксиоме объединения.

Доказательство. В качестве ε -эффективных множеств, рассмотрим произвольное семейство прямых, проходящих через все точки $x \in X$. Макропереход в графе шаровой генерации с фильтром $M(\delta)$ даст множество $B(x, \delta)$. Используя последовательность $\{\delta_i\}$ из доказательства теоремы 7.1, получим систему подмножеств, соответствующих разным фильтрам, $B = \{B(x, \delta) | x \in X, \delta \in \{\delta_i\}\}$, которая является базой, порождающей все открытые множества топологии Евклида и их замыкания, путём операции объединения, возможно в трансфинитном числе. \square

Замечание 7.1. Если сделать макропереход в графе сферической генерации с концентрацией без метрического фильтра, то у всех точек будет получена одинаковая окрестность, совпадающая со всем пространством.

8. Равномерная вложимость графа в евклидово пространство.

В предыдущих построениях существенно использовалось то, что генерация графа происходит в евклидовом пространстве заданной размерности. Рассмотрим каким внутренним характеристикам графа это соответствует.

Определение 8.1. Бесконечный граф имеет *равномерную метрическую размерность* n , $n < \infty$, если его вершины можно инъективно вложить в евклидово пространство данной размерности со следующими ограничениями.

1а. Расстояние между любыми двумя вершинами не меньше некоторого значения $\varepsilon > 0$.

2а. Длина любого ребра не превышает некоторого значения a , $0 < a < \infty$.

3а. Такого вложения не существует для меньших размерностей.

Обозначение $n = \text{metr dim}(G, A)$. \square

Замечание 8.1. Графы с конечной равномерной метрической размерностью имеют равномерное ограничение на ранг вершин. Это следует из того, что после вложения в евклидово пространство в каждом шаре содержится только конечное число вершин, а

длины рёбер равномерно ограничены. Поэтому число рёбер, смежных одной вершине, не выше числа образов вершин в шаре с радиусом равным ограничению на длину рёбер. Графы с неограниченным рангом вершин не имеют равномерной метрической размерности.

Пример 8.1. Рассмотрим напыление примера 5.1 (в каждой клетке клеточного разбиения пространства \mathbb{R}^n содержится ровно одна точка напыления). Построим на точках напыления граф, сопоставив ребро любой паре точек в соседних клетках, имеющих общую грань некоторой субразмерности. Этот граф имеет строгую размерность n . Для построения нужного вложения достаточно каждую точку напыления переместить в центр соответствующей клетки. Если сторона клетки равна 1, то вложение имеет параметры $\varepsilon = 1$ и $a = \sqrt{n}$.

Пример 8.2. Рассмотрим пуассоновское напыление раздела 3. Зададим равномерное ограничение K на ранг вершины графа. Построим на точках напыления как на вершинах граф, сопоставив ребро каждой паре точек напыления, между которыми расстояние меньше 1. Пронумеруем точки реализации напыления произвольным образом. Начиная с вершины с номером 1, последовательно проведём прореживание напыления. Если у очередной вершины ранг окажется выше заданного равномерного ограничения, то отбросим смежные ей вершины с ближайшими большими, чем у неё, номерами и соответствующие этим вершинам рёбра во всём графе, в необходимом числе. Полученный граф имеет равномерную метрическую размерность n . После прореживания в каждом единичном шаре остаётся точек не более, чем K . Распределим вершины графа по точкам равномерной координатной сети с достаточно малым шагом $\varepsilon < K^{-1}$, отобразив каждую вершину в ближайшую к ней точку сети. Полученное вложение соответствует параметрам ε и $a = 1 + 2\varepsilon\sqrt{n}$.

Замечание 8.2. В обоих примерах исходное расположение точек в пространстве удовлетворяет равномерному верхнему ограничению на длину рёбер, но допускает сколь угодно близкое расположение вершин графа (как смежных, так и не смежных).

Замечание 8.3. Если отказаться от требования нижнего ограничения на расстояния между точками, а требовать только отсутствия точек накопления образов вершин, то любой граф с конечным рангом вершин можно вложить в одномерное пространство при наличии равномерного верхнего ограничения на длину рёбер. Для доказательства рассмотрим связную компоненту графа (без учёта ориентации рёбер). Выберем в ней одну вершину, которую назовём стартовой. Отобразим стартовую точку в точку 0 числовой прямой, 1-окрестность стартовой вершины в интервал $(0;1)$, 2-окрестность — в интервал $(1;2)$, и т. д. Тогда все рёбра имеют длину не более 2. Но (в общем случае) число образов вершин i -окрестности стартовой точки на интервалах $(i-1;i)$ растёт неограниченно с ростом радиуса окрестности, и расстояние между этими точками становится сколь угодно малым.

Замечание 8.4. Если отказаться от требования верхнего ограничения на длину рёбер, то все графы со счётным числом вершин имеют вложение в одномерное пространство при наличии нижнего ограничения на расстояния между вершинами. Для доказательства можно произвольно расположить вершины по целым точкам числовой прямой.

Определение 8.2. Рассмотрим граф (G, A) со счётным числом вершин и конечным рангом всех вершин. Обозначим $U(g, r)$ r -окрестность вершины $g \in G$ по рёбрам графа без учёта ориентации, $r \in \mathbb{N}$, и $u(g, r) = \#U(g, r)$ — число вершин в этой окрестности. Назовём топологической размерностью графа величину

$$\text{top dim}(G, A) = \sup_{g \in G} \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(u(g, r))}{\log(r)} \right\} \quad (8.1)$$

Это частный случай размерности Хаусдорфа для случая степенного роста меры окрестности от радиуса. Если $n = \text{top dim}(G, A)$, то

$$u(g, r) = b(r)r^n; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(b(r))}{\log(r)} = 0; \quad (8.2)$$

Утверждение 8.1. Для любого графа, имеющего как равномерную метрическую, так и топологическую размерность, верно неравенство

$$\text{top dim}(G, A) \leq \text{metr dim}(G, A). \quad (8.3)$$

Доказательство. Если для графа определена равномерная метрическая размерность, то для любой вершины $U(g, r) \subset B(x(g), ar)$, где $x(g)$ — образ вершины $g \in G$ при вложении в \mathbb{R}^n , а $B(x, R)$ — шар с центром в x и радиусом R в этом евклидовом пространстве. Число образов вершин в этом шаре не превосходит значения $(2ra/\varepsilon)^n$. Поэтому $u(g, r) \leq (2a/\varepsilon)^n r^n$, и по формуле (8.2) $\text{top dim}(G, A) \leq n$. \square

Утверждение 8.2. Имеются графы, для которых неравенство (8.3) строгое.

Приведём пример такого графа. Схема начального участка показана на рисунке 5.

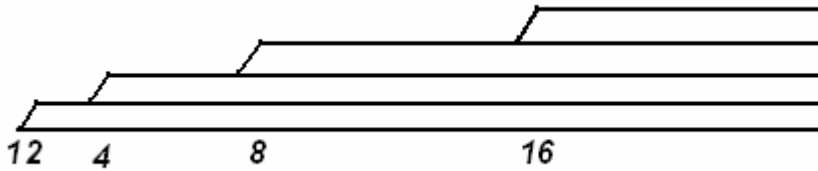


Рис.5. Схема графа, определённого формулами (8.4)(8.5). Отмечены точки ветвления. Рёбра идут вдоль показанных линий. Граф имеет топологическую размерность 1 и метрическую размерность 2. Горизонтальные линии выражают последовательности вершин с ребрами между соседними вершинами. Наклонные отрезки выражают одиночные рёбра.

Вершины графа определим как подмножество двухмерной целочисленной решётки $G \subset \mathbb{Z}^2$. Оно состоит из дискретных полупрямых

$$\begin{aligned} L_0 &= \{(0, i) \mid i = 1, \dots\}; \\ L_1 &= \{(1, i) \mid i = 2, 3, \dots\}; \dots \\ L_m &= \{(m, i) \mid i = 2^m, 2^m + 1, \dots\}, \quad m = 0, 1, \dots; \\ G &= L_0 \cup L_1 \cup \dots; \end{aligned} \quad (8.4)$$

Множество рёбер:

$$\begin{aligned} A &= \{((m, i), (m, i+1)) \mid m \in 0, 1, \dots; i \geq 2^m; i \in \mathbb{N}\} \cup \\ &\cup \{((m, 2^m - 1), (m+1, 2^m)) \mid m = 1, \dots\}; \end{aligned} \quad (8.5)$$

Наиболее быстро в этом графе растут окрестности точки $x = (0, 1)$. Рёбра из второго подмножества правой части (8.5) задают ветвление графа на линейные компоненты, определённые первым подмножеством той же формулы. Для r -окрестности указанной точки длины всех линейных участков не больше r , а число линейных компонент равно $\lfloor \log(r) \rfloor$. Поэтому можно записать оценку $u(x, r) \leq r \lfloor \log(r) \rfloor$. Тогда

$$\text{topdir}(G, A) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\log \log(r)}{\log(r)} \right) = 1$$

Но при равномерном метрическом вложении графа с неограниченным ветвлением в евклидову прямую возникают рёбра сколь угодно большой длины. При построении графа

было реализовано равномерное метрическое вложение в плоскость. Поэтому $\text{metr dim}(G, A) = 2$. \square

Не меняет ситуацию и более сильное определение топологической размерности, в котором зависимость мощности окрестности вершины графа от её радиуса строго степенная.

Определение 8.3. Граф имеет сильную топологическую размерность n , если в формуле (8.2) $b(r) \leq b < \infty$.

Утверждение 8.3. Имеются графы, для которых неравенство (8.3) строгое при сильной топологической размерности.

Приведём пример такого графа. Схема начального участка показана на рисунке 6.

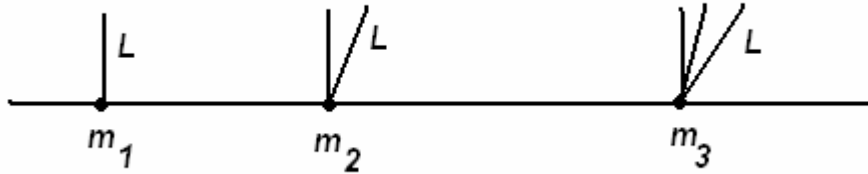


Рис. 6. Схема начального участка графа, имеющего сильную топологическую размерность 1 и метрическую размерность 2. Горизонтальная линия изображает последовательность вершин со связями соседних вершин. Линии L изображают одиночные рёбра, отмечены номера точек ветвления графа.

Зададим число $b > 1$ и последовательность натуральных чисел

$$m_i > \frac{i(i+1)}{2(b-1)} - 1; \quad i = 1, \dots; \quad (8.6)$$

Множество вершин

$$G = M \cup L;$$

$$M = \{v_1; v_2; \dots\};$$

$$L = \{w_1^1; w_1^2; w_2^2; \dots; w_1^i; \dots; w_i^i; \dots\};$$

Множество рёбер (неориентированных)

$$A = \{(v_j, v_{j+1}) \mid j = 1, \dots\} \cup \{(v_{m_j}, w_k^j) \mid j = 1, \dots; k = 1, \dots, j\}.$$

Второе слагаемое правой части обозначим как множество рёбер L . В этом графе

$$u(1, m_i + 1) = m_i + 1 + \sum_{j=1}^i j = m_i + 1 + \frac{i(i+1)}{2}.$$

С учётом неравенства (8.6)

$$u(1, m_i + 1) < b(m_i + 1).$$

Для других значений радиуса тем более верно $u(1, r) < br$. Значит, сильная топологическая размерность этого графа равна 1. Но если осуществлять равномерное вложение этого графа в \mathbb{R}^1 , то 1-окрестности точек v_{m_i} требуют использования не менее чем $i+2$ последовательно расположенных точек. Поэтому длина рёбер в этой окрестности при любом вложении будет не меньше, чем $\varepsilon(i+2)/2$. С ростом параметра i эта величина растёт неограниченно. Следовательно, вложение не является равномерным метрическим. При любом вложении этого графа в конечномерное евклидово пространство неограниченный рост числа рёбер, исходящих из одной вершины приводит либо к неограниченному росту длин рёбер, либо к уменьшению сколь угодно близко к нулю расстояния между свободными концами этих рёбер. Такое вложение не является метрическим. Таким образом, метрическая размерность этого графа равна ∞ . \square

Замечание 8.5. В графе утверждения 8.3 ветвление ранг каждой вершины конечен, но нет равномерного ограничения ранга. В графе утверждения 8.2 ранг всех вершин не выше трёх. Имеется модификация примера утверждения 8.3, в которой ранги вершин равномерно ограничены числом 3. Формальное описание этого графа несколько сложнее, но основано на той же идее, что утверждение 8.3. Приведём схему начального фрагмента этого графа (рисунок 7) и необходимые соотношения параметров.



Рис. 7. Граф с сильной топологической размерностью 1 и с метрической размерностью 2 при равномерном ограничении ранга вершин 3. Начальный фрагмент. Линия означает бесконечную вправо цепочку вершин v_1, v_2, \dots . Отмечены вершины в окрестности точек ветвления.

$$u(v_{m_i}, i) \stackrel{\text{def}}{=} L_i = (i+1)(i+2)/2;$$

$$S(i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^i L_j;$$

$$u(v_1, m_i + i) = m_i + i + S(i);$$

Если

$$m_i > \frac{S(i)}{b-1} - i;$$

то

$$u(v_1, m_i + i) = m_i + i + S(i) < b(m_i + i);$$

Сильная топологическая размерность графа равна 1. Но вложение этого графа в евклидову прямую требует разрядки в $i+1$ раз для окрестности i -й точки ветвления. Поэтому любое вложение — не равномерное. Метрическая размерность равна 2 (вложение показано на рисунке 7).

Из сказанного выше следует, что метрическая размерность не определяется только скоростью роста окрестности вершины графа. Требуются дополнительные структурные характеристики. Введём стандартный n -мерный граф (сеть), с помощью которого можно описать структуру произвольного графа с той же метрической размерностью. Обозначим e_1, \dots, e_n порождающие векторы целочисленной решётки \mathbb{Z}^n .

Определение 8.4. Назовём n -сетью граф вида $\text{Net}(n) = (\mathbb{Z}^n, A[n])$, где

$$A[n] = \{(z, z + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) \mid z \in \mathbb{Z}^n; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{-1; 0; 1\}\}.$$

В этом графе каждая точка целочисленной n -мерной решётки связана со всеми точками на поверхности куба со стороной 2 с центром в этой точке. Всего $3^n - 1$ рёбер у каждой точки. В определении графа вложение в \mathbb{R}^n не задано, но поскольку $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, то вложение можно осуществить прямым отождествлением вершин графа и целых точек пространства. Это вложение является равномерным метрическим с $\varepsilon = 1$ и $a = \sqrt{n}$.

Определение 8.5. Факторграфом $(G, A)/\theta = (\theta, A/\theta)$ графа (G, A) по разбиению θ на множестве G его вершин называется граф, вершины которого суть элементы разбиения, и два элемента разбиения $v, w \in \theta$ связаны ребром $(v, w) \in A/\theta$ в факторграфе,

если имеются две вершины $g \in v$ и $q \in w$, и эти вершины связаны ребром $(g, q) \in A$ в исходном графе. Факторграф *равномерный*, если число вершин исходного графа во всех элементах разбиения равномерно ограничено сверху конечным числом.

Теорема 8.1. Счетный граф имеет метрическую размерность n , если и только если на нём можно построить равномерный факторграф, который изоморфно вкладывается в $\text{Net}(n)$, и это наименьшее такое n .

Доказательство. Необходимость. Если (G, A) метрически n -мерный, то рассмотрим его соответствующее вложение в \mathbb{R}^n (определение 8.1.). Построим произвольное разбиение пространства \mathbb{R}^n на кубы со стороной $2a$, образующее прямоугольную сеть. Рассмотрим разбиение на вершинах графа, объединив в одном элементе вершины, расположенные в одном кубе. В каждом элементе содержится не более чем $\beta(2a/\varepsilon)^n$ вершин (где β — величина обратная объему единичного шара). Поскольку длины всех рёбер не превосходят значения a , то в факторграфе ребра соединяют только соседние кубы. Это означает, что факторграф равномерный и вложен в $\text{Net}(n)$. **Достаточность.** Пусть у (G, A) имеется равномерный факторграф, который изоморфно вложен в $\text{Net}(n)$. Вложим инъективно вершины $\text{Net}(n)$ в целочисленную решётку на \mathbb{R}^n . Каждой целочисленной точке сопоставим куб со стороной 1 (клетку), в котором она вершина с наименьшим значением всех координат. Пусть в каждом факторклассе (элементе разбиения) не более чем K вершин из (G, A) . Построим в каждом координатном единичном кубе координатную сеть с расстоянием между ближайшими точками $\varepsilon = 1/K$. Отобразим вершины из факторкласса, который соответствует произвольной вершине $\text{Net}(n)$, в клетку, которая сопоставлена этой вершине. Причём образы вершин расположим по точкам сети в этой клетке (их заведомо больше, чем K). Тогда расстояния между образами вершин не меньше чем ε . А длины рёбер не превосходят наибольшего расстояния между вершинами соседних единичных кубов. Поэтому $a < 2\sqrt{n}$. Построено равномерное метрическое вложение (G, A) в \mathbb{R}^n . \square

9. Макропереход перенормировкой вложения графа.

В этом разделе будет предложен ещё один метод макроперехода от графа некоторой метрической размерности к непрерывному пространству Евклида той же размерности.

Определение 9.1. Метрическая размерность графа n называется полной, если у него существует локально конечный факторграф, который изоморфен $\text{Net}(n)$.

Равномерное метрическое вложение такого графа в \mathbb{R}^n заполняет все клетки некоторой кубической сети. Назовём его полным вложением.

Определение 9.2. Пусть в пространстве \mathbb{R}^n задана последовательность счётных подмножеств (W_1, \dots) . Точку пространства $x \in \mathbb{R}^n$ назовём предельной для этой последовательности, если для любого шара с центром в этой точке все члены последовательности, начиная с некоторого, имеют с этим шаром непустое пересечение. Другими словами, для каждого $r > 0$ существует $K \in \mathbb{N}$ такое, что при $k > K$ имеется $y \in W_k$ для которого $|y - x| < r$. Обозначение $x \in \text{Lim}\{W_1, \dots\}$. Соответственно, совокупность всех предельных точек последовательности обозначена $\text{Lim}\{W_1, \dots\}$.

Определение 9.3. Пусть в пространстве \mathbb{R}^n задано счётное подмножество $W \subset \mathbb{R}^n$. Назовём дилатацией этого множества относительно точки $x \in \mathbb{R}^n$ с коэффициентом $c \in \mathbb{R}$ подмножество

$$D[x, c]W \stackrel{\text{def}}{=} \{x + c(y - x) \mid y \in W\} \quad (9.1)$$

В частности, $D[x,1]W = W$, $D[x,0]W = \{x\}$.

Определение 9.4. Пусть в пространство \mathbb{R}^n равномерно метрически полно вложен граф (G, A) . Последовательностью перенормировки этого вложения относительно точки $x \in \mathbb{R}^n$ назовём последовательность конечных множеств $W_k(x) = D[x, k^{-1}]U(y(x), k)$, $k = 1, \dots$, где $y(x)$ — ближайшая к точке x вершина графа по вложению.

Теорема 9.1. В условиях определения 9.4 последовательность перенормировки порождает топологию Евклида множествами вида $D[x, r]Lim\{W_1(x), \dots\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in (0; 1)$.

Доказательство. В силу полноты вложения графа $Lim\{W_1(x), \dots\} = C(x, a)$, где a — параметр вложения, $C(x, a)$ — ориентированный по осям координат открытый куб с центром x и стороной $2a$. Поэтому указанная в формулировке совокупность множеств совпадает с множеством всех так ориентированных кубов, имеющих сторону не больше $2a$. Этот набор открытых множеств порождает всю топологию Евклида. \square

Следствие. Теоремы 8.1 и 9.1 вместе устанавливают достаточные условия возможности порождения топологии Евклида макропереходом в форме требования к структуре графа.

Определение 9.5. Пусть в пространстве \mathbb{R}^n имеется напыление и построенный на нём граф (G, A) со счётным числом вершин. Последовательностью перенормировки графа относительно точки $x \in \mathbb{R}^n$ назовём последовательность конечных множеств $V_k(x) = D[x, l(k)^{-1}]U(y(x), k)$, $k = 1, \dots$, где $y(x)$ — ближайшая к точке x вершина графа, и $l(k) = \max\{|z - x| \mid z \in U(y(x), k)\}$.

Заметим, что $V_k(x) \subset B(x, 1)$, где, как и в разделе 7, $B(x, \delta)$ — шар с центром x и радиусом δ .

Теорема 9.2. Рассмотрим произвольную реализацию графа (G, A) из раздела 4. Коническая индукция порождается множествами вида $D[x, r]Lim\{V_1(x), \dots\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in (0; 1)$.

Доказательство. В силу определения напыления в разделах 3 и 5 и генерации графа в разделе 4, верно предельное соотношение $Lim\{V_1(x), \dots\} = \varphi_-(x) \cap B(x, 1)$ с вероятностью 1. Поэтому, множества, указанные в формулировке теоремы, совпадают с множествами $\varphi_-(x) \cap B(x, r)$ всех конусов (полных индукторов точки), ограниченных сферами сколь угодно малых радиусов. Этот набор множеств порождает всю коническую индукцию по аксиоме транзитивного объединения. \square

Замечание 9.1. Перенормировку графа можно было использовать и в теореме 9.1 вместо перенормировки вложения. Но в теореме 9.2 нельзя заменить перенормировку графа перенормировкой вложения. Это связано с тем, что рёбра графа раздела 4 имеют неограниченную длину.

Заключение.

Изложенный материал позволяет сделать вывод, что решение перечисленных задач можно получить, используя аппарат индукторных пространств.

Возможность описания процесса через полную систему инвариантов или через принцип наименьшего действия оказалась эквивалентной требованию, чтобы отношение индукции, сопоставляющее в фазовом пространстве процесса каждой точке проходящие через неё траектории в качестве индукторов, было транзитивным, т. е. образовывало индукторное пространство.

Получить уравнение диффузии, согласованное с требованиями теории относительности, оказалось возможным при помощи описания процесса в двух индукциях на пространстве-времени: евклидовой топологии и бесконечного графа сети явной разностной схемы, сопоставленного каждой точке.

Получить непрерывный макроскопический предел для процессов, определённых на ориентированных графах, в форме процесса на евклидовом или псевдоевклидовом пространстве оказалось возможным с помощью генерации порождающей системы индукторов евклидовой или конической индукции как замыкания индукторов на графе, преобразованном одной из описанных процедур макроперехода и вложенном в евклидово пространство.

Можно также отметить относительную простоту и прозрачность полученных решений, что свидетельствует об адекватности выбранного аппарата.

Литература.

1.1 Арнольд В. И. Математические методы классической механики. (5-е издание) М. Едиториал УРСС, 2003, ISBN 5-354-00341-5.

1.2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М. Наука, 1983г, 280с.

2.1. Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.

2.2. Райченко А. И., Математическая теория диффузии в приложениях, К., 1981.

2.3. Crank J., The mathematics of diffusion, 2 ed., Oxf., 1975.

2.4. С. Я. Азаков. Диффузии уравнение. Физическая энциклопедия. http://femto.com.ua/articles/part_1/1083.html

2.5. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., «Наука», 1972.

3.1. A. V. Koganov. Faithful Representations of Groups by Automorphisms of Topologies. Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 15, No 1, 2008, s. 66-76.

3.2. А. В. Коганов. Индукторные пространства, как средство моделирования. "Вопросы кибернетики" (Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование) под ред. В. Б. Бетелина, РАН, М., 1999г, С 119-181.

3.3. А. В. Коганов. Автоморфизмы конических индукторных пространств. "Вопросы кибернетики" (Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование) под ред. В. Б. Бетелина, РАН, М., 1999г, С 182-189.

3.4. Коганов А. В. Индукторные пространства, как обобщенная модель пространства-времени. Сб. статей «На пути к пониманию феномена времени. Конструкции времени в естествознании.», под редакцией А.П.Левича, М., Прогресс-Традиция, 2009, с. 369-396 (480с, ISBN 5-89826-297-0)

3.5. А. В. Коганов. Переход от римановой к псевдоримановой геометрии через квазиконическую индукцию. Сб. н. т. 3-го Международного симпозиума «Симметрии: теоретический и методический аспекты». Астрахань, 2009, ОГО УДПО АИПКП, ISBN 978-5-8087-0248-6, с. 43-49

3.6. Коганов А. В. Представление групп автоморфизмами нормальных топологических пространств. \ \ Компьютерные исследования и моделирование, том 1, № 3, 2009, Институт компьютерных исследований (Удмурдский государственный университет), Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, ISSN 2076-7633, с. 243-249.

3.7. В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик. Группы Ли преобразований. // Энциклопедия ВИНТИ, Итоги науки и техники, серия «Современные проблемы математики, фундаментальные направления» Группы и алгебры Ли, вып. 1, т. 20, 1988, п. 4.1, с. 148.

3.8. Luca Bombelli, Joe Henson, Rafael D. Sorkin. Discreteness without symmetry breaking: a theorem. // arXiv: gr-qc/0605006v1, 1 may 2006.

3.9. А. К. Гуц. Хроногеометрия. Аксиоматическая теория относительности. \ GOY ВПО «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского». 2008, 340с.(ISBN 978-5-9901331-2-9)

3.10. Александров А. Д. Конусы с транзитивной группой. // ДАН СССР, 1969, Т 189, №4, с. 695-698.

3.11. Александров А. Д. Отображения семейств конусов. // ДАН СССР, 1971, т. 197, №5, с. 991-994.

[3.7]\ 3.12. Александров А. Д. Отображения аффинных пространств с системами конусов. // Зап. науч. семинар, ЛОМИ. 1972, Т 27, с. 7-16.