

Модель электрона в виде четырехмерного шара в пространстве Минковского

Л. С. Шихобалов

Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет; laur3@yandex.ru

Аннотация. При решении одной из задач механики автору потребовалось учесть наличие свободных электронов в макроскопическом теле. Специфика задачи не позволяла использовать традиционную дираковскую модель электрона. Вместе с тем, требовалось, чтобы модель электрона была лоренц-инвариантной.

В пространстве Минковского три геометрических объекта являются лоренц-инвариантными: точка, световой конус и псевдосфера. Точечная модель электрического заряда приводит к сингулярности собственного электромагнитного поля заряда в месте его нахождения. Кроме того, точечная модель не позволяет рассчитать самодействие заряда и имеет другие известные недостатки.

В связи с этим были рассмотрены два варианта модели электрона: световой конус и псевдосфера (оба наделенные лоренц-инвариантными внутренними структурами). Первый вариант модели позволяет вычислить электромагнитное поле произвольно движущегося заряда, причем без использования уравнений Максвелла. Электромагнитное поле оказывается чисто геометрическим эффектом. Второй вариант, в котором электрон моделируется псевдосферой с внутренней структурой, дает возможность определить спин электрона на основе обычных правил механики. В этом варианте аномальный магнитный момент электрона, то есть малое отличие g -фактора от числа 2, объясняется самодействием электрона; кроме того, получает новое определение постоянная тонкой структуры. Можно надеяться, что построенная модель электрона окажется полезной при решении ряда физических задач.

1. Введение

При решении одной из задач механики автору потребовалось учесть наличие в макроскопическом теле свободных электронов.

Квантовая электродинамика, описывающая свойства электрона, разработана с большой степенью точности. Первым предложил релятивистскую модель электрона П. А. М. Дирак [1]. В дальнейшем теория электрона продолжала совершенствоваться (см., например, [2, 3, 4]). Все известные свойства электрона систематизированы в обзоре [5].

Специфика упомянутой механической задачи требовала, чтобы собственный момент количества движения (спин) электрона рассчитывался по обычным правилам механики, а не являлся следствием выполнения уравнения Дирака, как это имеет место в квантовой электродинамике. Это затруднение удалось преодолеть благодаря следующему обстоятельству. Конечной целью решения задачи являлось нахождение некоторых макроскопических характеристик рассматриваемого тела. В связи с этим отсутствовала необходимость задавать состояние электронов в столь полной мере, как это делается в квантовой теории посредством волновой функции. В частности, требуемая точность задания движения электронов была такой, при которой, например, след, оставляемый движущимся электроном в камере Вильсона, может рассматриваться как геометрическая (то есть бесконечно тонкая) линия. Учитывая это обстоятельство, оказалось возможным пожертвовать полнотой описания состояния электрона и строить модель электрона таким способом, которым обычно строятся в механике модели материальных тел. Кроме того, по условиям данной задачи требовалось, чтобы симметрия используемой модели электрона описывалась группой Лоренца. В связи с этим в качестве модели электрона был принят *четырёхмерный (псевдо)шар в пространстве Минковского, наделенный определенной структурой*. Настоящая работа содержит описание этой модели.

Модель строится в два этапа. На первом этапе в качестве геометрического образа электрона принимается световой конус, равномерно заполненный времениподобными прямыми. На втором этапе времениподобные прямые заменяются определенными винтообразными объектами. Внешней границей такой конструкции является (псевдо)сфера, поэтому электрон в данной модели может рассматриваться как *четырёхмерный шар*. Этот геометрический образ электрона назван *частицей*.

Данная модель обладает следующими свойствами. Она описывает электрическое и магнитное поля произвольно движущегося заряда (причем электромагнитное поле оказывается чисто геометрическим эффектом). Конечность радиуса частицы позволяет вычислить спин частицы на основании обычных правил механики и рассчитать самодействие частицы.

Построенная модель не дает столь полного описания состояния электрона, как это делает квантовая электродинамика. Тем не менее, можно надеяться, что данная модель найдет применение не только при решении задач механики, но и при решении ряда задач физики.

2. «Точечная» частица

При построении теории элементарных частиц естественно использовать в качестве исходного многообразия пространство Минковского, служащее фундаментом специальной теории относительности. Это пространство, которое обозначим через M , является четырехмерным вещественным псевдоевклидовым пространством сигнатуры $(+ - - -)$.

В работах [6, 7] предложена модель, в рамках которой электрон представлен в пространстве M в виде совокупности времениподобных прямых, названных *лучами*, которые пересекаются в одной точке — *центре* — и равномерно заполняют внутренность светового конуса с вершиной в этой точке. Центр движется в пространстве M вдоль гладкой времениподобной линии L — *мировой линии*. При движении сохраняются углы между всеми лучами и углы между каждым лучом и касательной к мировой линии. Лучи трактуются как геометрические образы неких материальных объектов; их точки именуются *элементами*. Эта геометрическая конструкция названа *частицей* (рис. 1).

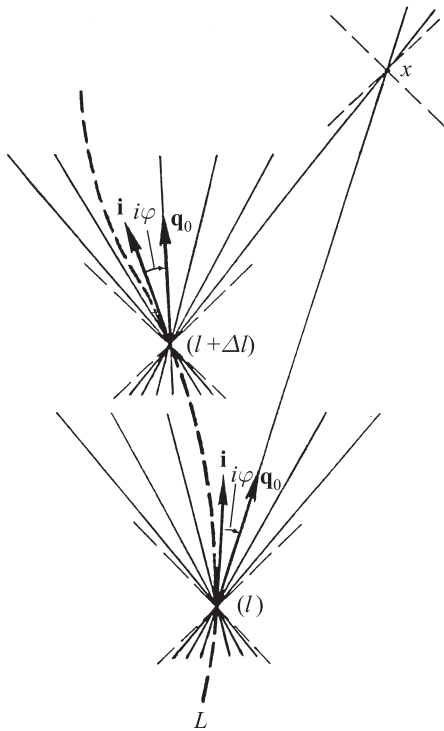


Рис. 1. Два положения частицы на мировой линии.

Углы $i\varphi$ между касательным ортом \mathbf{i} к мировой линии L и направляющими ортами лучей \mathbf{q}_0 не меняются при движении частицы (тонкие штриховые линии — световые конусы; i — мнимая единица; l — натуральный параметр на L ; x — произвольная точка пространства M).

В случае частицы конечного радиуса прямые, проходящие через центр частицы, — оси лучей; \mathbf{q}_0 — направляющий орт оси луча.

Каждому элементу луча ставится в соответствие двухвалентный ан-

тисимметричный тензор (бивектор) $\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0$, где \mathbf{q}_0 — направляющий орт луча, ориентированный в сторону будущего, \mathbf{j}_0 — скорость элемента относительно пространства M (произведение векторов тензорное).

Скорость \mathbf{j}_0 элемента луча есть, по определению, производная вектора перемещения элемента по натуральному параметру l на мировой линии L . В [6] показано, что элемент луча, находящийся на расстоянии Q от центра частицы, движется со скоростью

$$\mathbf{j}_0 = \mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{i} - \mathbf{i} \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) \cdot \mathbf{Q}, \quad (1)$$

где \mathbf{i} — единичный касательный вектор к мировой линии L , имеющий начало в центре частицы и направленный в сторону будущего; $\mathbf{Q} = \pm Q \mathbf{q}_0$ — вектор, соединяющий центр частицы с рассматриваемым элементом луча (верхний и нижний знаки относятся соответственно к случаям, когда элемент луча находится в будущем и прошлом относительно центра частицы); \mathbf{q}_0 — направляющий орт луча, ориентированный в сторону будущего; тензорное произведение векторов обозначено без знака умножения между ними; точка — знак скалярного умножения. Скорость \mathbf{j}_0 — величина безразмерная. При необходимости использовать для описания движения частицы величину размерности скорости, следует брать вместо \mathbf{j}_0 величину $c \mathbf{j}_0$ ($c \mathbf{j}_0$ — производная вектора перемещения элемента по собственному времени частицы $t = l/c$; c — скорость света).

В правой части формулы (1) первое слагаемое описывает трансляционную составляющую движения частицы, а второе слагаемое описывает гиперболическое вращение частицы, обеспечивающее постоянство угла между векторами \mathbf{q}_0 и \mathbf{i} при движении частицы. Поэтому первое слагаемое не зависит от расстояния Q между центром частицы и рассматриваемым элементом луча, тогда как второе слагаемое пропорционально Q . Отметим, что гиперболическое вращение называют также бустом.

Вследствие движения частицы вдоль мировой линии, через каждую фиксированную точку x пространства M проходят лучи частицы от различных ее расположений на мировой линии (см. рис. 1). Интегрирование указанного выше бивектора по всем таким расположениям частицы с весом, пропорциональным количеству лучей в окрестности x , дает *тензор*

собственного электромагнитного поля частицы F_s [6]:

$$\begin{aligned}
 F_s(x) &= a \int_{(L_-)} \frac{\mathbf{q}_0 \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}_0 \mathbf{q}_0}{S(Q)} dl = \\
 &= \frac{e(\mathbf{Q}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q})}{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i})^3} \Big|_* + \frac{e \left[(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}) \left(\mathbf{Q} \frac{d\mathbf{i}}{dl} - \frac{d\mathbf{i}}{dl} \mathbf{Q} \right) - \left(\mathbf{Q} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dl} \right) (\mathbf{Q}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{Q}) \right]}{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i})^3} \Big|_*, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где a — скалярный параметр, пропорциональный общему количеству лучей и принимаемый равным $4\pi e$; e — заряд электрона; L_- — часть мировой линии частицы, находящаяся внутри светового конуса прошлого точки x ; Q — четырехмерный интервал (расстояние) между центром частицы и точкой x ; $S(Q)$ — площадь той полы псевдосферы радиуса Q с центром в центре частицы, которая заключена внутри светового конуса будущего частицы; \mathbf{q}_0 — направляющий орт луча, проходящего через точку x ; \mathbf{j}_0 — скорость элемента луча, находящегося в точке x (скорость \mathbf{j}_0 задается формулой (1), в которой вектор \mathbf{Q} имеет конец в точке x и начало в центре частицы, движущимся вдоль L , $\mathbf{Q} = Q\mathbf{q}_0$); звездочка относится ко всем функциям в помеченном ею выражении и означает, что каждая функция вычисляется в точке y пересечения мировой линии L и светового конуса прошлого точки x , например, $\mathbf{Q}_* = \overrightarrow{yx}$ (\mathbf{Q}_* — изотропный вектор). Интеграл в формуле (2) берется по участку L_- мировой линии, чтобы удовлетворить принципу причинности, согласно которому физические характеристики в точке x могут зависеть только от объектов, находящихся внутри светового конуса прошлого этой точки. Отметим, что сингулярность, возникающая при вычислении интеграла, компенсируется сингулярностью площади псевдосферы $S(Q)$.

Найденное значение тензора собственного электромагнитного поля частицы F_s приводит к выражениям для электрического и магнитного полей частицы, которые совпадают (с точностью до обозначений) с известными выражениями для электрического и магнитного полей точечного заряда. Обычно эти поля вычисляются с использованием уравнений Максвелла и потенциалов Лиенара–Вихерта [8]. Подчеркнем, что здесь при вычислении поля F_s не применяются уравнения Максвелла и используется только один подгоночный скалярный параметр a . В данной модели электромагнитное поле есть чисто геометрический эффект.

Выше отмечалось, что в формуле (1) первое слагаемое не зависит от расстояния Q , а второе слагаемое пропорционально Q . Вследствие этого,

в правой части формулы (2) в нерелятивистском приближении первое и второе выражения оказываются пропорциональными соответственно $1/r^2$ и $1/r$ (r — расстояние между центром частицы и точкой x в трехмерном физическом пространстве). Второе выражение представляет собой волновую часть электромагнитного поля. В случае прямолинейной мировой линии (при равномерном движении частицы) второе выражение обращается в нуль, так как в этом случае $d\mathbf{i}/dl = \mathbf{0}$.

Взаимопроницаемость лучей различных частиц обеспечивает выполнение *принципа суперпозиции электромагнитных полей*.

В рассмотренной модели частица имеет в трехмерном физическом пространстве, сопутствующем ее центру, нулевой размер, поэтому такая частица названа «точечной» *частицей* [6, 7].

3. Частица конечного радиуса

Усовершенствуем модель таким образом, чтобы она описывала *спин* электрона.

Будем говорить, как и ранее, что частица — это геометрический объект в пространстве Минковского, представляющий собой определенную совокупность лучей. Однако теперь будем полагать, что каждый луч есть некий трехмерный винтообразный объект с времениподобной осью, который состоит из n_* штук одинаковых «толстых» винтовых линий и вращается вокруг своей оси (рис. 2). Дадим детальное описание этой конструкции.

Начнем с определения осей лучей. Назовем *осями* лучей частицы времениподобные прямые, которые пересекаются в одной точке — *центре* частицы — и равномерно распределены по внутренности светового конуса с вершиной в этой точке (см. рис. 1). Всю совокупность осей лучей назовем *остовом* частицы.

Теперь введем понятие луча. Зададим какой-либо единичный времениподобный вектор \mathbf{i} (он будет играть роль касательного орта к мировой линии частицы). Обозначим через \mathbf{q}_0 направляющий орт оси произвольного луча. Будем считать, что оба вектора направлены в сторону будущего и отложены от центра частицы.

Введем для каждой оси луча такое содержащее ее трехмерное аффинное подпространство $C_{\mathbf{q}_0} \subset M$, для которого ассоциированным векторным пространством служит

$$Lin\{\mathbf{q}_0\} \oplus Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \quad (\text{при } \mathbf{q}_0 \neq \mathbf{i}),$$

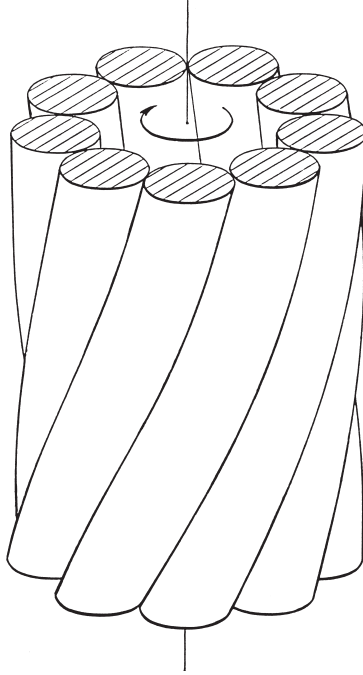


Рис. 2. Один из лучей частицы.

где символ $Lin\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots\}$ обозначает линейную оболочку векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$; \perp — переход к ортогональному дополнению в векторном пространстве, ассоциированном с M ; \oplus — прямая сумма векторных пространств. Далее будем обозначать аффинное пространство и ассоциированное с ним векторное пространство одним символом.

Зададим в плоскости $Lin^\perp\{\mathbf{i}, \mathbf{q}_0\} \subset C_{\mathbf{q}_0}$ фигуру, состоящую из n_* штук одинаковых кругов радиуса p_* , которые касаются друг друга и центры которых располагаются вдоль окружности радиуса r_* (рис. 3). Из рисунка легко видеть, что

$$p_* = r_* \sin \frac{\pi}{n_*}. \quad (3)$$

Лучом с осью $Lin\{\mathbf{q}_0\}$ назовем трехмерный винтообразный объект в $C_{\mathbf{q}_0}$, который «заметет» данная фигура, если придать ей винтовое движение в $C_{\mathbf{q}_0}$ вдоль оси $Lin\{\mathbf{q}_0\}$. При таком движении фигуры каждая ее точка «заметает» в $C_{\mathbf{q}_0}$ некоторую винтовую линию, которую будем называть *нитью*. Уравнение нити есть обычное уравнение винтовой линии в трехмерном подпространстве $C_{\mathbf{q}_0}$. Совокупность нитей, которые

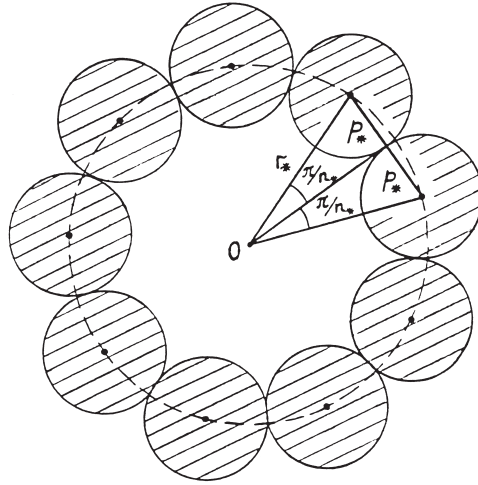


Рис. 3. Поперечное сечение луча
(показанное количество кругов — условное).

порождаются всеми точками одного круга, есть та самая «толстая» винтовая линия, о которой говорилось выше. Будем именовать ее *спиралью*. Луч состоит из n_* одинаковых спиралей (см. рис. 2). Примем, что все лучи вращаются вокруг своих осей с одинаковой и постоянной угловой скоростью ω (которая определяется как производная угла поворота луча по собственному времени частицы).

Частица есть совокупность лучей, введенных указанным выше способом. Движение лучей в пространстве M и их вращение происходят таким образом, что образуемая ими конструкция — частица — повторяет себя во все моменты времени. Поэтому частица — недеформируемый четырехмерный объект в пространстве Минковского M . *Мировой линией* частицы будем считать мировую линию ее центра.

Назовем *собственным физическим пространством* частицы трехмерную пространственноподобную гиперплоскость Γ_p , проходящую через центр частицы и ортогональную вектору \mathbf{i} : $\Gamma_p = \text{Lin}^\perp\{\mathbf{i}\}$. Сечение частицы гиперплоскостью Γ_p будем именовать *центральной сечением* частицы.

Если трактовать (в грубом приближении) фигуру на рис. 3 как круговое кольцо ширины $2r_*$, то тогда центральное сечение частицы можно представлять себе в виде сферической оболочки в Γ_p со средним радиусом r_* и толщиной p_* . Можно показать, что в таком, грубом, при-

близости внешняя граница частицы есть (псевдо)сфера радиуса $r_* + p_*$ с центром в центре частицы. Ее уравнение $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = -(r_* + p_*)^2$ (где \mathbf{R} — радиус-вектор точек сферы относительно центра частицы). Это — линейчатая гиперповерхность, аналогичная однополостному гиперboloиду в трехмерном собственно евклидовом пространстве (рис. 4). Она имеет изотропные образующие и изотропный (световой) асимптотический конус. Поскольку внешняя граница частицы близка к сфере, то сама частица может рассматриваться как четырехмерный шар в пространстве M . Его радиус равен $r_* + p_*$. Однако, в связи с тем, что, как будет показано далее, $p_* \ll r_*$, будем называть *радиусом* частицы величину r_* .

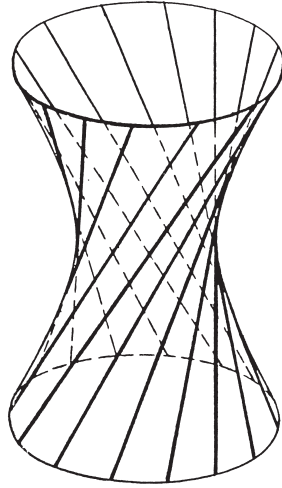


Рис. 4. Однополостный гиперboloид.

Отметим, что правомерность использования модели электрона в форме шара косвенно подтверждается работой [9], в которой показано, что электрон имеет сферическую симметрию.

Теперь мы можем ввести понятие спина частицы.

Момент количества движения луча \bar{K}_* может быть вычислен как момент количества движения фигуры, показанной на рис. 3, при вращении ее вокруг центра с угловой скоростью ω (при условии, что каждый из n_* кругов, составляющих фигуру, имеет массу, равную массе спирали m_*). На основании обычного определения момента количества движения и

формулы (3) имеем:

$$|\overline{K}_*| = n_* m_* |o| r_*^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_*}{r_*} \right)^2 \right] = n_* m_* |o| r_*^2 \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{n_*} \right) \right]. \quad (4)$$

Будем называть псевдовектор \overline{K}_* *спином луча*. Интегрирование спина луча \overline{K}_* по всем лучам дает *спин частицы \overline{K}* .

Благодаря четырехмерности пространства M , поворот луча вокруг его оси может происходить как внутри трехмерного подпространства C_{q_0} , так и с промежуточным выходом из подпространства C_{q_0} . Можно доказать, что при повороте луча вокруг его оси на угол π с промежуточным выходом из C_{q_0} спирали луча меняют свою ориентацию, то есть правоориентированные спирали становятся левоориентированными и наоборот. Будем называть процесс переориентации спиралей луча *переориентацией луча*. Обратим внимание на то, что при переориентации лучей остов частицы (состоящий из осей лучей) остается неподвижным.

Спин частицы \overline{K} , как можно доказать, равен нулю в случае, когда спирали всех лучей имеют одинаковые ориентации (в силу сферической симметрии центрального сечения частицы). Если же половина лучей частицы имеет спирали одной ориентации, а другая половина лучей имеет спирали противоположной ориентации, то спин частицы \overline{K} принимает максимальное по модулю значение

$$|\overline{K}|_{max} = \frac{1}{2} m_e |o| r_*^2 \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{n_*} \right) \right], \quad (5)$$

где принято, что $N n_* m_* = m_e$; N — общее количество лучей; m_e — масса электрона.

Более детально данная модель электрона рассмотрена в книге [10].

4. Постоянная тонкой структуры

На основании формулы (4) можем записать:

$$\frac{|\overline{K}_*|}{m_* |o| r_*^2} = n_* \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{n_*} \right) \right] \quad (\text{при } o \neq 0). \quad (6)$$

Выражение в правой части формулы (6) представляет собой безразмерную величину. В квантовой электродинамике известна безразмерная

фундаментальная константа — постоянная тонкой структуры α . Приравняем правую часть формулы (6) к α^{-1} :

$$n_* \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{n_*} \right) \right] = \alpha^{-1}. \quad (7)$$

Подставляя в (7) экспериментальное значение $\alpha^{-1} \approx 137,0359991$ [11], получаем:

$$n_* = 137 \quad (8)$$

с относительной погрешностью $1 \cdot 10^{-7}$. Тот факт, что для величины n_* , задающей количество спиралей в луче, получено целочисленное значение со столь высокой точностью, является существенным доводом в пользу справедливости модели.

В дальнейшем будем считать равенство (8) постулатом модели (рис. 5). В таком случае формула (7) приобретает смысл нового *определения постоянной тонкой структуры α* .

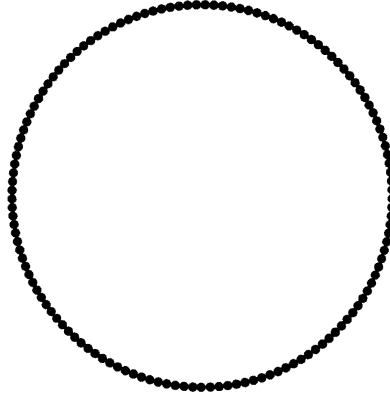


Рис. 5. Поперечное сечение луча при $n_* = 137$.

Из (7) и (8) находим: $\alpha \approx 0,0072973518$, что совпадает с экспериментальным значением α , равным $0,0072973526$ [11], с относительной погрешностью около $1 \cdot 10^{-7}$. Отметим, что ранее в физике постоянная α вводилась только как комбинация других фундаментальных констант: $\alpha = e^2/(\hbar c)$, где e — заряд электрона, \hbar — постоянная Планка, c — скорость света.

Из формул (3) и (8) заключаем, что $p_*/r_* = \sin(\pi/n_*) \approx 1/44$. Следовательно, $p_* \ll r_*$. Именно в связи с этим радиусом частицы была названа величина r_* .

5. Законы движения частицы

Уравнение движения нити постулируем в форме

$$\frac{d\mathbf{q}}{dl} = \frac{e}{m_e c^2} (F + F_s) \cdot \mathbf{q}, \quad (9)$$

где все функции относятся к элементу (точке) нити, лежащему в центральном сечении частицы; \mathbf{q} — единичный касательный вектор к нити, ориентированный в сторону будущего; F — тензор внешнего электромагнитного поля; F_s — тензор собственного электромагнитного поля частицы; l — натуральный параметр на мировой линии частицы; e и m_e — заряд и масса электрона; c — скорость света.

Тензор F_s для частицы конечного радиуса может быть вычислен следующим способом [10]. Каждому элементу нити ставится в соответствие бивектор $\mathbf{q}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{q}$, где \mathbf{q} — касательный орт к нити в данном ее элементе, \mathbf{j} — скорость данного элемента (определяемая как производная вектора перемещения элемента по параметру l). Пусть x — произвольная точка пространства M и указанный бивектор относится к элементу нити, находящемуся в точке x . Интегрирование этого бивектора по всем расположениям частицы, при которых ее нити проходят через x , с весом, пропорциональным общей длине нитей в единице объема окрестности x , дает значение тензора F_s в точке x . Получаемая таким способом формула для вычисления собственного электромагнитного поля частицы аналогична формуле (2), но имеет более громоздкий вид. Вдали от частицы это поле совпадает с полем «точечной» частицы (при усреднении по областям пространства с линейными размерами, превосходящими поперечный диаметр луча $2r_*$). А внутри центрального сечения частицы, на расстояниях, меньших $r_* - p_*$ от центра частицы, поле F_s равно нулю, вследствие отсутствия нитей в этой области (см. рис. 2 и 3). Таким образом, в данной модели собственное поле заряда не имеет расходимости.

Пусть внутри центрального сечения частицы внешнее электромагнитное поле F однородно, а среднее значение величины $F_s \cdot \mathbf{q}$ пренебрежимо мало. Проинтегрируем обе части уравнения (9) по поперечному сечению луча, лежащему в центральном сечении частицы. Вследствие осесимметричности луча, интеграл от вектора \mathbf{q} по поперечному сечению луча пропорционален направляющему орту оси луча \mathbf{q}_0 . Поэтому при сделанном допущении относительно полей F и F_s такое интегрирование приводит

к уравнению движения оси луча:

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = \frac{e}{m_e c^2} F \cdot \mathbf{q}_0, \quad (10)$$

где значение внешнего электромагнитного поля F берется в центре частицы.

Теперь проинтегрируем обе части уравнения (10) по всем лучам. В силу сферической симметрии центрального сечения частицы, интеграл от вектора \mathbf{q}_0 по всем лучам есть вектор, направленный по касательной к мировой линии. Поэтому в результате интегрирования получаем *уравнение движения центра частицы*:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dl} = \frac{e}{m_e c^2} F \cdot \mathbf{i}, \quad (11)$$

где \mathbf{i} — единичный касательный вектор к мировой линии L , направленный в сторону будущего и имеющий начало в центре частицы; значение поля F берется, как и в (10), в центре частицы.

Уравнение (11) совпадает с известным уравнением движения точечного заряда в электромагнитном поле F [8]. Оно описывает ускорение частицы, то есть задает форму мировой линии L .

Уравнение (10) является новым. Оно описывает ускорение частицы (так как его следствием является уравнение (11)), а также описывает вращение частицы, что будет видно из дальнейшего.

В работах [6, 10] показано, что для произвольного электромагнитного поля характеризующие его тензор F , вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} и псевдовектор напряженности магнитного поля \overline{H} связаны формулами

$$F = \mathbf{E}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{E} + \overline{H} \cdot \boldsymbol{\varkappa}; \quad (12)$$

$$\mathbf{E} = F \cdot \boldsymbol{\tau}; \quad \overline{H} = \frac{1}{2} F \cdot \cdot \boldsymbol{\varkappa}, \quad (13)$$

где подразумевается, что в пространстве Минковского M задана некоторая инерциальная система отсчета $\{T, \Gamma\}$ с времениподобной прямой T (*осью времени*) и с ортогональной к T трехмерной пространственноподобной гиперплоскостью Γ (*физическим пространством*); $\boldsymbol{\tau}$ — орт оси T , ориентированный в будущее; $\boldsymbol{\varkappa}$ — псевдотензор Леви-Чивита

над Γ (трехвалентный абсолютно антисимметричный единичный псевдотензор); две точки обозначают бискалярное умножение.¹ Таким образом, здесь $T = Lin\{\boldsymbol{\tau}\}$, $\Gamma = Lin^\perp\{\boldsymbol{\tau}\}$, $\Gamma \perp T$. Тензор F является инвариантным геометрическим объектом в пространстве M . Вектор \mathbf{E} и псевдовектор \overline{H} — «компоненты» тензора F в системе отсчета $\{T, \Gamma\}$ ($\mathbf{E} \in \Gamma$, $\overline{H} \in T$).

Рассмотрим движение частицы в окрестности некоторого момента ее собственного времени t_0 . Введем отвечающую этому моменту мгновенную сопутствующую частице инерциальную систему отсчета $\{T_p, \Gamma_p\}$, где $T_p = Lin\{\mathbf{i}_0\}$, $\Gamma_p = Lin^\perp\{\mathbf{i}_0\}$, \mathbf{i}_0 — значение касательного вектора \mathbf{i} к мировой линии в момент t_0 . Прямая T_p и гиперплоскость Γ_p есть соответственно мгновенная собственная ось времени частицы и мгновенное собственное физическое пространство частицы. В момент t_0 центр частицы совпадает с точкой пересечения T_p и Γ_p .

В дальнейшем будем полагать, что напряженности \mathbf{E} и \overline{H} внешнего электромагнитного поля относятся к системе отсчета $\{T_p, \Gamma_p\}$, то есть определяются формулами (13), в которых $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_0$ и \varkappa — псевдотензор Леви–Чивита над Γ_p . В соответствии с принятым ранее допущением об однородности поля F , поля \mathbf{E} и \overline{H} считаются однородными внутри центрального сечения частицы.

На основании выражений (11) и (12) находим:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}(t_0) = \frac{e}{m_e c^2} \mathbf{E}(t_0), \quad (14)$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля в центре частицы; учтено, что $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_0$, $\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}_0 = 1$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_0 = 0$ (так как $\mathbf{E} \in \Gamma_p$, $\Gamma_p \perp \mathbf{i}_0$) и $\varkappa \cdot \mathbf{i}_0 = \widehat{0}$ (ибо \varkappa — псевдотензор над Γ_p , $\Gamma_p \perp \mathbf{i}_0$); $\widehat{0}$ — нулевой двухвалентный тензор.

Из уравнения (14) следует, что при действии на частицу однородного электромагнитного поля F движение центра частицы зависит только от электрической компоненты \mathbf{E} этого поля в мгновенной сопутствующей частице инерциальной системе отсчета.

¹ Правило выполнения скалярного и бискалярного умножений тензоров иллюстрируется таким примером:

$$\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} \cdot \cdot \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w} = \mathbf{x}\mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}\mathbf{w} = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})\mathbf{x}\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}\mathbf{w} = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})\mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{v})\mathbf{x}\mathbf{w},$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ — произвольные векторы; тензорное произведение обозначено без знака умножения между сомножителями.

Если в центральном сечении частицы во все моменты времени $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ — нулевой вектор), то, согласно (14), $\mathbf{i} = \text{const}$ и, значит, мировая линия L прямолинейна. В таком случае введенная выше система отсчета $\{T_p, \Gamma_p\}$ может рассматриваться как сопутствующая частице во все моменты времени. При этом ось времени T_p совпадает с L , а физическое пространство Γ_p движется вместе с центром частицы вдоль T_p поступательно, оставаясь параллельным своему положению в момент t_0 .

Пусть внутри центрального сечения частицы электрическое поле \mathbf{E} равно нулю во все моменты времени, а магнитное поле принимает некоторое постоянное значение \overline{H} . В этом случае, согласно только что доказанному, мировая линия L частицы является прямолинейной, а сама частица, как мы сейчас покажем, вращается вокруг оси, параллельной \overline{H} .

В самом деле, из уравнений (10) и (12) при $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ имеем:

$$\frac{d\mathbf{q}_0}{dl} = \frac{e}{m_e c^2} \overline{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_0, \quad (15)$$

где \overline{H} — напряженность магнитного поля в центре частицы.

Отметим, что в уравнении (15) \varkappa — постоянный псевдотензор, так как он определен над физическим пространством Γ_p , которое в данном случае движется вдоль L вместе с центром частицы поступательно, оставаясь параллельным самому себе. Поэтому в правой части уравнения (15) множитель при \mathbf{q}_0 — постоянная величина.

Разложим вектор \mathbf{q}_0 на сумму временной и пространственной составляющих:

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_T + \mathbf{q}_\Gamma, \quad (16)$$

где $\mathbf{q}_T \in T_p$, $\mathbf{q}_\Gamma \in \Gamma_p$ (это разложение задается формулами $\mathbf{q}_T = (\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{i}_0) \mathbf{i}_0$ и $\mathbf{q}_\Gamma = \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_T$).

Подставляя разложение (16) в уравнение (15), находим:

$$\frac{d\mathbf{q}_T}{dl} + \frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dl} = -\frac{e}{m_e c^2} \overline{H} \times \mathbf{q}_\Gamma, \quad (17)$$

где учтено, что $\varkappa \cdot \mathbf{q}_T = \widehat{0}$ (так как \varkappa — псевдотензор над Γ_p , $\mathbf{q}_T \in T_p$ и $\Gamma_p \perp T_p$), и использовано равенство $\overline{H} \cdot \varkappa \cdot \mathbf{q}_\Gamma = -\overline{H} \times \mathbf{q}_\Gamma$; \times — знак векторного умножения в Γ_p .

Поскольку $d\mathbf{q}_T/dl \in T_p$, $d\mathbf{q}_\Gamma/dl \in \Gamma_p$, $\overline{H} \times \mathbf{q}_\Gamma \in \Gamma_p$ и $\Gamma_p \perp T_p$, то из (17) следует, что

$$\frac{d\mathbf{q}_T}{dl} = \mathbf{0}; \quad (18)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = -\frac{e}{m_e c^2} \overline{H} \times \mathbf{q}_\Gamma. \quad (19)$$

Пусть t — собственное время частицы. Принимая во внимание, что $dl = c dt$ и что в рассматриваемом случае $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ (при всех t), получаем из уравнений (14), (18) и (19):

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{0}; \quad (20)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = \mathbf{0}; \quad (21)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_\Gamma}{dt} = \overline{\omega} \times \mathbf{q}_\Gamma, \quad (22)$$

где

$$\overline{\omega} = -\frac{e}{m_e c} \overline{H} \quad (\overline{\omega} \in \Gamma_p). \quad (23)$$

Уравнения (20)–(22), напомним, относятся к случаю, когда внутри центрального сечения частицы электромагнитное поле имеет в инерциальной системе отсчета, сопутствующей частице, нулевую электрическую компоненту \mathbf{E} и однородную и постоянную магнитную компоненту \overline{H} . Эти уравнения приводят к следующим выводам. Уравнение (20) означает, что в данном случае мировая линия частицы L представляет собой прямую линию. Из (21) вытекает, что временные составляющие \mathbf{q}_Γ направляющих векторов \mathbf{q}_0 осей лучей не изменяются с течением времени. Согласно уравнению (22), пространственные составляющие \mathbf{q}_Γ направляющих векторов \mathbf{q}_0 вращаются в Γ_p с постоянной угловой скоростью $\overline{\omega}$ вида (23), одинаковой для всех лучей.

Таким образом, изнутри физического пространства Γ_p движение частицы «выглядит» как вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг оси, параллельной \overline{H} и проходящей через центр частицы. Учитывая, что в четырехмерном пространстве M при таком движении частицы остается неподвижной плоскость $Lin\{\mathbf{i}, \overline{H}\}$, можно сказать, что частица вращается в пространстве M вокруг плоскости $Lin\{\mathbf{i}, \overline{H}\}$. Подчеркнем, что магнитное поле \overline{H} в формуле (23) должно вычисляться в инерциальной системе отсчета $\{T_p, \Gamma_p\}$, сопутствующей частице.

В проведенных выкладках не учтено самодействие частицы, так как мы пренебрегли собственным электромагнитным полем частицы F_s . В работе [10] вычислена магнитная компонента \overline{H}_s этого поля для случая

вращающейся частицы (она пропорциональна угловой скорости вращения частицы $\bar{\omega}$). Заменяя в формуле (23) величину \bar{H} суммой $\bar{H} + \bar{H}_s$, имеем согласно [10]:

$$\bar{\omega} = - (g/2) \frac{e}{m_e c} \bar{H} \approx -1,0011640 \frac{e}{m_e c} \bar{H}, \quad (24)$$

здесь для обозначения числового коэффициента использован символ $g/2$, где g — множитель Ланде. Сравнение формул (23) и (24) показывает, что дробная часть коэффициента $g/2$ обусловлена *самодействием* частицы.

В физике формулы вида (23) и (24) хорошо известны и коэффициент $g/2$ измерен в опыте с высокой точностью. Его экспериментальное значение составляет 1,00115965218073 [5, 11]. Вытекающее из формулы (24) значение $g/2 \approx 1,0011640$ отличается от этого экспериментального значения на относительную величину около $4 \cdot 10^{-6}$. В работе [10] при выводе формулы (24) был использован ряд упрощений. Отказ от них, как можно ожидать, позволит получить значение величины $g/2$ с большей точностью.

Обратим внимание на различие интерпретаций формулы (24) в настоящей модели и в традиционной модели электрона. Согласно традиционной модели, эта формула описывает прецессию спина электрона. При этом для объяснения дробной части коэффициента $g/2$ вводится допущение о существовании виртуальных частиц, которые окружают электрон и частично экранируют его заряд. В нашей же модели формула (24) описывает вращение частицы, при этом дробная часть коэффициента $g/2$ естественным образом объясняется влиянием на частицу ее собственного электромагнитного поля.

6. Магнитный момент электрона

Рассмотрим движение частицы под действием неоднородного магнитного поля.

Пусть в системе отсчета $\{T_p, \Gamma_p\}$, сопутствующей частице, существует ненулевой градиент магнитного поля $\nabla \bar{H}$ внутри центрального сечения частицы. В [10] показано, что такое поле приводит к переориентации половины лучей частицы и что в соответствии с уравнением (9) в этом случае на частицу действует сила

$$\mathbf{f} = \nabla(\bar{H} \cdot \bar{\mu})_+ \quad (\mathbf{f} \in \Gamma_p), \quad (25)$$

где

$$\bar{\mu} = \frac{1}{4} e r_* \bar{k}; \quad (26)$$

r_* — радиус частицы; \bar{k} — единичный псевдовектор, параллельный псевдовектору напряженности магнитного поля \bar{H} (оба возможные направления псевдовектора \bar{k} — по и против направления \bar{H} — равновероятны, в силу равной вероятности переориентации одной или другой половины лучей частицы под действием градиентного магнитного поля); индекс $+$ при скалярном произведении векторов означает переход к положительно определенной метрической форме в Γ_p : $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})_+ = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma_p$ (при этом $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})_+ \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \Gamma_p$). Отметим, что в [10] при выводе формулы (25) не учитывалось собственное электромагнитное поле частицы и считалось, что величины порядка p_*/r_* пренебрежимо малы по сравнению с единицей (поскольку $p_* \ll r_*$).

В [10] показано также, что в данном случае спин частицы \bar{K} ориентирован, как и $\bar{\mu}$, вдоль псевдовектора \bar{k} и имеет абсолютную величину, задаваемую формулой (5).

Допустим, что линейная скорость вращения лучей равна скорости света:²

$$|o| r_* = c. \quad (27)$$

В этом случае спин частицы, согласно выражениям (5) и (27), имеет вид

$$\bar{K} = \frac{1}{2} m_e c r_* \bar{k}, \quad (28)$$

где мы пренебрегли величиной $(1/2) \sin^2(\pi/n_*)$ по сравнению с единицей (так как $\sin(\pi/n_*) = p_*/r_* \ll 1$).

На основании формул (26) и (28) находим:

$$\bar{\mu} = \frac{e}{2m_e c} \bar{K}; \quad (29)$$

² В рамках теории относительности это допущение является оправданным. Дело в том, что пространство Минковского представляет собой линейное пространство. Поэтому в нем переменные, отсчитываемые вдоль времениподобных и пространственноподобных направлений, должны измеряться в одинаковых физических единицах (либо быть безразмерными). Например, этими переменными могут быть натуральные параметры, измеряемые в единицах длины. При переходе к таким переменным скорость объектов, имеющих изотропные мировые линии, то есть скорость света, оказывается равной единице. Таким образом, данное допущение, фактически, означает, что характерная для рассматриваемой модели скорость считается единичной.

отметим, что направления $\bar{\mu}$ и \bar{K} противоположны, из-за отрицательного знака заряда электрона e .

В электродинамике известны зависимости, подобные зависимостям (25) и (29). В них величины, стоящие на месте величин $\bar{\mu}$ и \bar{K} , обозначают соответственно магнитный и кинетический моменты движущихся зарядов. Учитывая, что в нашей модели спин частицы \bar{K} есть ее собственный кинетический момент, заключаем отсюда, что рассматриваемая нами частица обладает *собственным магнитным моментом* $\bar{\mu}$ вида (26).

Следует отметить, что в настоящей модели приобретает ясный механический смысл энергия покоя электрона $E_0 = m_e c^2$. А именно, в [10] показано, что при выполнении зависимости (27) энергия E_0 есть кинетическая энергия частицы относительно пространства Минковского M . Половина этой энергии связана с поступательным движением частицы вдоль мировой линии, другая ее половина связана с вращением лучей частицы вокруг своих осей.

Дробная часть величины $g/2$, то есть разность $(g/2) - 1$ (где g — множитель Ланде), называется аномальным магнитным моментом (АММ). Для электронов эта величина может быть найдена с помощью формулы (24). В работе [12] рассчитано влияние электронного аномального магнитного момента на дифференциальное поперечное сечение процесса упругих столкновений электронов с атомами водорода. Авторы этой работы учли наличие электрического поля и лазерного поля с круговой поляризацией. Они пишут: «Для нерелятивистского режима добавка от электронного АММ заметна, но мала. При увеличении напряженности электрического поля до средних значений это влияние становится более выраженным» [12].

Обратим внимание на то обстоятельство, что определенная часть изменения дифференциального поперечного сечения может быть обусловлена следующей причиной. В формуле (23), как было подчеркнуто ранее, магнитное поле \bar{H} должно вычисляться в инерциальной системе отсчета, сопутствующей частице (а не в «неподвижной» лабораторной системе отсчета). Это же относится, разумеется, и к формуле (24). Различие значений поля \bar{H} в движущейся и неподвижной системах отсчета становится значительным при переходе от нерелятивистского режима к релятивистскому. Данное обстоятельство может давать заметный вклад в эффект, обсуждаемый в работе [12].

7. Заключение

Лучистая модель электрона, рассмотренная выше, верно описывает основные свойства электрона.

В частности, она позволяет вычислить электромагнитное поле произвольно движущегося заряда, причем это поле не имеет расходимости в месте нахождения заряда. В данной модели спин электрона рассчитывается по обычным правилам механики. Аномальный магнитный момент электрона объясняется самодействием электрона. Постоянная тонкой структуры получает новое определение, причем ее значение вычисляется с высокой точностью из простой формулы, вытекающей непосредственно из законов механики. В этой модели энергия покоя электрона $E_0 = m_e c^2$ есть кинетическая энергия электрона относительно пространства Минковского. Модель фактически объединяет в одном объекте обычно различаемые электрический заряд и его электромагнитное поле. Можно ожидать, что эта модель окажется полезной при решении ряда задач физики.

Автор благодарит Э. А. Гурмузову и С. А. Шейнермана за ценные замечания.

Список литературы

- [1] *Dirac P. A. M.* The quantum theory of the electron // Proceedings of the Royal Society of London A. — 1928. — Vol. 117. — P. 610–624.
- [2] *Fabian J.* Spin's lifetime extended // Nature. — 2009. — Vol. 458, No. 7238 (2 April 2009). — P. 580–581.
- [3] *Santos E. S., Rivelino R., de Montigny M., de Melo G. R.* A spin Hamiltonian for non-relativistic electrons and their interaction with an external field // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2010. — Vol. 43. — 335304 (10 p.).
- [4] *Hofer W. A.* Unconventional approach to orbital-free density functional theory derived from a model of extended electrons // Foundations of Physics. — 2011. — Vol. 41, No. 4. — P. 754–791.

- [5] *Nakamura K. et al. (Particle Data Group)*. Review of particle physics // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. — 2010. — Vol. 37. — No. 7A. — 075021 (1422 p.) URL: <http://pdg.lbl.gov>.
- [6] *Шихобалов Л. С.* Новый взгляд на электродинамику // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. — 1997. — Вып. 3 (№ 15). — С. 109–114. — Англ. перев.: *Shikhobalov L. S.* Electrodynamics reexamined // Saint Petersburg University Mechanics Bulletin (New York, Allerton Press). — 1997. — Vol. 15, No. 3. — http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/shikhobalov_novy_vzglyad.pdf.
- [7] *Шихобалов Л. С.* О строении физического вакуума // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. — 1999. — Вып. 1 (№ 1). — С. 118–129.
- [8] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — 6-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 504 с. — (Теоретическая физика; Т. 2).
- [9] *Hudson J. J., Kara D. M., Smallman I. J., Sauer B. E., Tarbutt M. R., Hinds E. A.* Improved measurement of the shape of the electron // Nature. — 2011. — Vol. 473, No. 7348 (26 May 2011). — P. 493–496.
- [10] *Шихобалов Л. С.* Лучистая модель электрона. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2005. — 230 с. — http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/shihobalov_luchistaya_model.pdf.
- [11] *Hanneke D., Fogwell S., Gabrielse G.* New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant // Physical Review Letters. — 2008. — Vol. 100. — 120801 (4 p.).
- [12] *Elhandi S., Taj S., Attaourti Y., Manaut B., Oufni L.* Electron's anomalous magnetic-moment effects on electron-hydrogen elastic collisions in the presence of a circularly polarized laser field // Physical Review A. — 2010. — Vol. 81. — 043422 (10 p.).